BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grüson, Johann Philipp,

Sammlung aufgelöster algebraischer Aufgaben nebst einer Einleitung in die Buchstabenrechnung und Algebra

Bd.: 2

Halle 1812

Math.p. 191 a-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081884-8

Sammlung
aufgelöster
Algebraischer Aufgaben
nebst
einer Einleitung
in die
Buchstabenrechnung und Algebra.

Von

Johann Philipp Grüson,

Königl. Preußischen Professor der Mathematik
und wirklichem Mitgliede der Akademie der Wissenschaften
in Berlin ꝛc. ꝛc.

Zweyter Theil.

Enthaltend bestimmte Aufgaben vom ersten Grade mit Zwey und mehreren unbekannten Größen.

Neue verbesserte und sehr stark vermehrte Ausgabe.

Halle, 1812.

In Johann Christian Hendels Verlage.

Vorbericht.

Es erscheint hier die Fortsetzung meiner Sammlung Algebraischer Aufgaben. Der Beyfall, mit welchem der erste Theil ist aufgenommen worden, hat meinen Fleiß, diesem zweyten einen noch höhern Grad der Vollkommenheit zu ertheilen, nicht wenig erhöhet.

Gerne habe ich daher die Erinnerungen benutzt, welche von sachkundigen Männern in öffentlichen Blättern, mir hierüber sind ertheilt worden. Habe ich sie nicht alle benutzt, so rührte dieses von der Verschiedenheit des Gesichtspunkts her, aus welchem der Recensent und ich das Werk und seinen Zweck ansahen.

So glaube ich noch immer, daß mein Zweck, dem Lehrer selbst, wenn er Aufgaben außer dem Zusammenhange, woran ihm nicht viel liegt, nehmen will, verständlich zu seyn, durch meine

Anordnug der Aufgaben besser erreicht worden ist, als es durch eine systematische geschehen würde, welche Recensent zu wünschen schien. Ich bin daher meinem Plane treu geblieben.

Wegen der zu weiten Entfernung des Druckorts, konnte die Korrektur nicht unter meiner unmittelbaren Aufsicht besorgt werden. Es können daher manche Druckfehler eingeschlichen seyn; eine Unvollkommenheit, die ich durch ein hinten angehängtes verbesserndes Verzeichnis derselben einigermaaßen zu heben suchen werde.

Uebrigens wünsche ich diesem zweyten Theil den Beyfall, mit welchem der erste aufgenommen wurde.

Berlin, den 1. April. 1794.

In dieser zweyten Auflage sind der Vermehrungen so viele, daß sie nicht alle aufgezählt werden können. -- Die beträchtlichsten sind, daß dieser Theil nun auch Aufgaben mit mehr als 2 unbekannten Größen enthält.

Der folgende dritte Theil wird Aufgaben vom 2ten Grade enthalten und bald erscheinen.

Berlin, den 21. Nov. 1811.

Grüson.

Ein-

Einleitung.

Ich habe bereits im ersten Theile dieser Sammlung algebraischer Aufgaben Seite 60. §. 65. u. f. etwas von den Gleichungen gesagt; jetzt folgt eine weitere Ausführung der analytischen Methode, Aufgaben und Gleichungen vom ersten Grade mit einer und mehreren unbekannten Größen, aufzulösen.

§. 1.

Durch Analysis verstehen wir hier die Wissenschaft vermittelst des algebraischen Calculs, und der Resolvirung der Gleichungen, alle die Aufgaben und verschiedenen Fragen, die über alle Arten der Größen gemacht werden können, aufzulösen.

§. 2.

Die Aufgaben oder die daraus entstehenden Gleichungen, können bestimmt, oder unbestimmt seyn. Bestimmt, wenn nur ein oder eine bestimmte Menge von Resultaten stattfindet. Unbestimmt, wenn eine unbestimmte Zahl von Resultaten stattfindet. Z. B. Zu drey gegebenen Größen a, b, c die vierte Proportionalzahl x zu finden. Man hat vermöge der Bedingungen der Aufgabe $a : b = c : x$, und folglich $x = \frac{bc}{a}$. Hier ist klar, daß in diesem Fall x bestimmt ist, denn es kann keinen andern Werth haben als den, der durch $\frac{bc}{a}$ entstehet. Aber wenn verlangt würde,

zwey

zwey Größen zu finden, deren Verhältniß, zweyenandern gegebenen Größen a und b gleich wäre: so würde diese Aufgabe unbestimmt seyn, weil man eine unzählige Menge finden kann, die das gegebene Verhältniß a : b haben.

Anmerk. Alle Aufgaben im ersten Theile dieses Werks, so wie auch in diesem zweyten Theile, sind bestimmte Aufgaben.

§. 3.

Wenn sich mehrere unbekannte Größen in einer Aufgabe befinden, und die darinnen enthaltene verschiedene Bedingungen eben so viel besondere Gleichungen geben; so ist die Aufgabe allezeit bestimmt, widrigenfalls ist sie unbestimmt.

§. 4.

Die bestimmten Gleichungen vom ersten Grade haben nur einen Werth. Die von höhern Graden können so viel besondere Werthe haben, als Einheiten in den höchsten Exponenten der unbekannten Größe enthalten sind.

Z. B. So können die Gleichungen vom zweyten Grade zwey; vom dritten Grade drey; vom vierten Grade vier Werthe haben ꝛc., wie in der Folge erwiesen werden soll.

§. 5.

Von der analytischen Methode, bey Auflösung der Aufgaben.

Um durch die Analysis eine Aufgabe aufzulösen, muß man sogleich mit Aufmerksamkeit die verschiedenen Umstände betrachten, welche in der Aussage der Aufgabe

gabe enthalten sind; ferner die gegebenen, und die gesuchten Größen gehörig unterscheiden.

§. 6.

Die bekannten Größen drückt man durch die ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, d, ꝛc. aus, und die unbekannten Größen durch die letzten x, y, z, ꝛc. Zuweilen pflegt man auch die Größen mit den Anfangsbuchstaben des Worts, wodurch sie ausgedrückt werden, zu bezeichnen; so bezeichnet man Summa mit s, Differenz mit d ꝛc.

§. 7.

Nun nimmt man an, die Aufgabe sey aufgelöst, und drückt durch die in der Aufgabe enthaltenen verschiedenen Größen, die Beziehungen aus, die sich unter ihnen befinden, so daß gleiche Ausdrücke oder Gleichungen entstehen.

§. 8.

Eine gut ausgedrückte bestimmte Aufgabe, enthält immer eben so viel besondre Bedingungen, als sie unbekannte Größen enthält, und es entstehen auch eben so viel Gleichungen. (§. 3.).

§. 9.

In den verschiedenen Gleichungen, welche sich aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben, befindet sich die unbekannte Größe, wenn nur eine Gleichung; oder die unbekannten Größen, wenn mehrere Gleichungen da sind, mit bekannten Größen auf beyden Seiten der Gleichung, durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division u. s. w., vermischt.

Da die Auflösung einer Aufgabe nur in der Findung des Werths der unbekannten Größen, welche in der Aussage enthalten sind, bestehet, so ist klar, daß wenn man die unbekannte Größe, welche man bestimmen will, auf eine Seite der Gleichung bringen könnte, und sie hier allein ohne einen andern Coëfficienten oder Divisor als die Einheit zu haben, da steht ihr Werth alsdann durch das Resultat aller andern Größen, welche in der andern Seite der Gleichung enthalten sind, ausgedrückt.

§. 10.

Daher ist die Wissenschaft, Aufgaben aufzulösen, nichts anders, als die Auflösung der Gleichungen. Diese Operation wird verrichtet, indem man die unbekannten Größen von den bekannten absondert; das heißt, indem man die unbekannten Größen durch einige der verschiedenen arithmetischen oder algebraischen Regeln, von allen andern Größen, mit denen sie verbunden seyn können, los zu machen sucht, dergestalt, daß sie sich ganz allein auf der einen Seite, und die andern sich auf der andern Seite der Gleichung vereinigt befinden.

§. 11.

Wenn nur eine unbekannte Größe in der Aufgabe, und folglich auch nur eine Gleichung da ist, und die unbekannte Größe durch Auflösung der Gleichung abgesondert ist; so enthält die eine Hälfte oder Seite der Gleichung die bekannten Größen, welche den Werth der Unbekannten geben.

Aber wenn die Aufgabe mehrere unbekannte Größen hat, und folglich auch mehrere Gleichungen davon herleitet, und man eine von diesen unbekannten Größen in einer von diesen Gleichungen, welche man will, absondert,

sondert, so wird man den Werth dieser Unbekannten, in bekannten und unbekannten Größen haben.

§. 12.

Alle diese verschiedenen unbekannten Größen abzusondern giebt es zwey Methoden: die erste besteht darin, daß man den Werth von einer und derselben Unbekannten in jeder Gleichung nimmt und diese Werthe unter sich vergleicht, dieses giebt alsdann neue Gleichungen, in welcher sich die erste Unbekannte nicht mehr befindet; verfährt man eben so mit den letztern Gleichungen, so kömmt man zur Bestimmung des besondern Werthes jeder Unbekannten.

§. 13.

Nach der zweyten Methode verfährt man so: Man sondert eine den unbekannten Größen aus einer von den Gleichungen der Aufgaben ab; diesen Werth setzt man nun in jeder der andern Gleichungen, worin sie sich befindet, statt ihrer hin; wodurch sie aus ihnen verschwindet; diese letzten Gleichungen haben alsdann eine Unbekannte weniger.

Sondert man nun ferner aus einer dieser letzten Gleichungen eine von den Unbekannten, und substituirt ihren Werth in den andern, worin sie sich befindet, so entstehen hieraus Gleichungen, die zwey Unbekannte weniger habe.

Indem man so fortfährt, um nach und nach die andern Unbekannten verschwinden zu lassen, welche sich auch in den Gleichungen nach den Substitutionen der Werthe der ersten Unbekannten befinden, so kömmt man zu einer Gleichung, die nicht mehr als eine unbekannte Größe enthält.

Man nimmt den Werth dieser letzten unbekannten Größe, welcher sich in bekannten Größen ausgedrückt befin-

befindet, und setzt ihn an seiner Stelle in die andern besondern Gleichungen, welche sie nebst einer andern Unbekannten enthalten; dieses bringt diese Gleichungen bis zu einer unbekannten, deren Werth man findet, indem man sie von allen andern bekannten Größen absondert.

Diese zwey ersten Unbekannten, die gefunden sind, dienen nun auch, indem man auf dieselbe Art verfährt, die dritte Unbekannte zu finden. Mittelst dieser Drey findet man die Vierte, und so fort bis sie alle bekannt und bestimmt sind.

§. 14.

Wenn man weniger besondere Gleichungen hat, als unbekannte Größen da sind, so ist die Aufgabe unbestimmt, weil man den Werth von keiner dieser Unbekannten in bekannten Größen finden kann.

§. 15.

Man setze z. B.: Eine Aufgabe habe drey unbekannte Größen, und ihre Bedingungen gäben nur zwey Gleichungen; so wird der Werth einer Unbekannten, den man aus der einen, oder der andern dieser Gleichungen gefunden hat, durch die bekannten und die beyden unbekannten Größen ausgedrückt seyn. Substituiren wir diesen Werth in der andern Gleichung, so wird diese nur noch zwey Unbekannte haben; absondert man eine dieser Unbekannten ab, so findet sich die andere immer unter den Größen mit begriffen, die mit ihr zusammen den Werth von jener unbekannten Größe geben. Daher kann der Werth der beyden ersten unbekannten Größen nur gefunden werden, wenn man die letzte als bekannt annimmt; das heißt, indem man ihr irgend einen Werth beylegt. Da man für sie so viel verschiedene Werthe setzen kann, als man nur

will,

will, so hat also auch die Aufgabe eben so viel besondere Solutionen, und folglich ist sie unbestimmt.

§. 16.

Es kann sich treffen, daß, obgleich die Bedingungen einer Aufgabe eben so viel Gleichungen geben, als sie unbekannte Größen enthält, sie dennoch unbestimmt ist; aber dieser Fall kann nur statt finden, wenn die Aufgabe nicht gut ausgedrückt ist, und wann die nämlichen Bedingungen unter verschiedenen, aber gleich bedeutenden Ausdrücken dargestellt sind.

Man setze z. B., daß man aus einer Aufgabe, die drey unbekannte Größen enthält, auch drey besondere Gleichungen ziehe, aber daß, nachdem man diese Gleichungen wohl untersucht hat, solche sich auf zwey bringen lassen, so ist klar, daß diese Aufgabe unbestimmt ist, ob sie es gleich anfangs gar nicht zu seyn schien. Wer z. B. sagt, $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ einer Größe sey so viel als $\frac{5}{6}$ dieser Größe, der sagt einerley, weil $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ ist, und daher aus dieser Angabe die unbekannte Größe nicht gefunden werden kann.

Darum muß man, so oft eine Aufgabe unbestimmt ist, die man doch nach allem Anschein für bestimmt hielt, genau auf die Aussage oder den Ausdruck aufmerksam seyn, und man wird alsdann finden, daß einige Umstände, welche man als verschieden angesehen hat, sich vereinigen, um die nämlichen Eigenschaften oder den nämlichen Gegenstand zu bezeichnen.

Dieses wäre der allgemeine Begriff, den man sogleich von der analytischen Methode geben könnte, die freylich mehr Entwicklung und Erklärung nöthig gehabt hätte; aber zum Theil ist man schon durch die Aufgaben des ersten Theils dieses Werks in etwas vorbereitet, und zum andern werden die in diesem und dem folgen-

den

den Theile vorkommenden Aufgaben gewiß hinlänglich seyn, alles vollkommen zu verstehen und einzusehen.

§. 17.

Von der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer und mehreren unbekannten Größen.

Die Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade, ist gar nicht schwer, und gründet sich auf den im ersten Theile dieser Sammlung algebraischer Aufgaben Seite 61. §. 67. gegebenen Grundsatz. Ich habe auch bereits dort Beyspiele zur Erläuterung gegeben, so wie überhaupt die Aufgaben des ersten Theils uns Anwendungen in großer Menge dargeboten haben; die jetzt folgenden werden aber die Anwendung dieses Grundsatzes in ein noch helleres Licht setzen.

§. 18.

Gesetzt, wir hätten diese Gleichung $x + 7 = y - 3$; und man wollte x finden, oder welches einerley x auf eine Seite ganz allein haben, so ist klar, daß man linker Hand 7 wegnehmen muß; aber weil alsdann die rechte Seite um 7 größer ist, als die linke Seite, so muß man, um die Gleichheit zwischen beyden zu erhalten, auch rechter Hand 7 von $y - 3$ abziehen, dieses geschieht, indem man zu $y - 3$, die Zahl 7 mit den Zeichen (—) hinzufügt, und man hat alsdann $x = y - 3 - 7 = y - 10$.

Will man y aus der Gleichung finden, so muß sie auch ganz allein auf einer Seite bleiben; dieserwegen muß man -3, womit sie verbunden ist, abziehen oder wegnehmen; aber wenn man -3 von dieser Hälfte der Gleichung verschwinden läßt, so ist das so viel, als hätte man sie um 3 vermehrt; um also diese Gleichheit

zwi-

zwischen beyden Hälften der Gleichung zu erhalten, muß man auch die andere Hälfte $x + 7$, um 3 vermehren, und man hat alsdann $x + 7 + 3 = x + 10 = y$.

§. 19.

Hieraus sieht man, daß die Gleichheit bey einer Gleichung nicht aufgehoben wird, wenn man auf beyden Seiten der Gleichung gleiches addirt oder subtrahirt, und daß man hierdurch jedes Glied der Gleichung von einer Seite zur andern bringen kann. Wir haben dieses auch hinlänglich bey den Aufgaben im ersten Theile dieses Werks gesehen, darum wollen wir hier nur noch zur leichtern Ausübung folgende Regel, die ganz aus dem vorhergehenden folgt, hersetzen.

Um ein oder mehrere Glieder von einer Seite der Gleichung zur andern zu bringen, oder zu versetzen, hat man nur nöthig die Zeichen dieser Glieder zu verwandeln, das heißt, wenn eine Größe das Zeichen (+) hat, so muß man ihr das Zeichen (−) geben, hat sie aber dieses letztere, so muß man ihr das erstere geben, und diese Größen mit den verwandelten Zeichen auf die andere Seite setzen.

Z. B. $x + a - cb = y + mp$, um hier in dieser Gleichung x allein zu haben, so setzt man nach der Regel $+a-cb$ mit den entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite, und man erhält

$$x = y + mp - a + cb.$$

§. 20.

Wenn man in einer Gleichung alle Glieder der einen Hälfte auf die andere Seite hin versetzt, so ist klar,

klar, daß auf der einen Seite alle Glieder, und auf der andern Null ist.

Z. B. $5x - 6a = 7y + 3c - 9$, so ist, wenn man $7y + 3c - 9$ auf die andere Seite hin versetzt:

$$5x - 6a - 7y - 3c + 9 = 0.$$

Anmerk. Dieses nennt man eine Gleichung auf Null reduciren, und wird bey höhern Gleichungen sehr häufig gebraucht.

§ 21.

Bisher war um eine Größe in einer Gleichung auf einer Seite allein zu haben, bloß Addition und Subtraktion, oder bloße Versetzung mit entgegengesetzten Zeichen nöthig, aber wir haben schon unter den Aufgaben im ersten Theile dieses Werks viele gehabt, deren Gleichung so beschaffen war, daß, um die unbekannte Größe allein auf einer Seite zu haben, auch Multiplikation und Division angewandt werden mußte, und dieses geschieht allemal, sobald die gesuchten Größen mit andern Größen multiplizirt oder dividirt sind.

Wir wollen damit anfangen, zu zeigen, wie man die Brüche aus der Gleichung schafft.

§. 22.

Es sey die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{y}{d} - \frac{a}{g}$ gegeben aus der man die Brüche schaffen soll.

Um den ersten Nenner a wegzuschaffen, so muß man alle Glieder der Gleichung durch diese Größe multipliziren, und man hat alsdann $x + \frac{ab}{c} = \frac{ay}{d} - \frac{a^2}{g}$

Um

Um den zweyten Nenner c wegzuschaffen, so muß man alle Glieder mit c multipliziren, und man erhält

$$cx + ab = \frac{acy}{d} - \frac{a^2c}{g}.$$

Man wird auf eben die Art alle Glieder mit d, und endlich mit g multipliziren, und erhält alsdann: $cdg\,x + abdg = acgy - a^2cd$, worin sich keine Brüche mehr befinden.

§. 23.

Dieses ganze Verfahren gründet sich darauf, daß man immer auf beyden Seiten der Gleichung alle Glieder mit einerley Größe multiplizirt, so müssen auch die daher entstehenden Produkte, das heißt die Hälften der Gleichung immer einander gleich bleiben.

§. 24.

Bemerkung.

Es ist klar, daß man, statt nach und nach die Gleichung mit einem Nenner zu multipliziren, um diese Operation abzukürzen, sogleich jedes Glied mit dem Produkt der übrigen Nenner der Gleichung multipliziren kann.

§. 25.

Z. B. Man hätte $\frac{a^2}{c} + b + \frac{cx}{2} = \frac{b^2}{a} - c + - \frac{dy}{3}$, und man wünscht die Brüche wegzuschaffen, so darf man nur überlegen, daß jedes ganze Glied, als b und c, als ein Bruch angesehen werden kann, dessen Nenner die Einheit wäre, und da die Einheit als Multiplikator die Größen nicht verändert, so multiplizirt man die Zähler a^2 des ersten Gliedes der linken Seite mit dem Produkte der von der Einheit verschiedenen Nenner,

das heißt, mit 2. a. 3 = 6a; das folgende Glied mit c. 2. a. 3 = 6 ac; alsdann den Zähler cx, mit c. a. 3 = 3 ac; ferner den Zähler b^2, mit c. 2. 3 = 6 c; c mit c. 2. a. 3 = 6ac, und endlich dy mit c. 2. a = 2ac. die daraus entstandene Gleichung wird seyn:

$$6a^3 + 6abc + 3ac^2 x = 6b^2c - 6ac^2 + 2acdy.$$

§. 26.

Durch dieses Verfahren verschwinden in einer Gleichung alle Brüche; allein nun ist die unbekannte Größe mit andern Größen multiplizirt, nämlich mit den Nennern der Brüche, die sich in der Gleichung befanden, und vielleicht noch außerdem mit andern, die sie vorher schon zu Coëfficienten hatte. Es frägt sich, wie man die unbekannte Größe wieder davon befreyen wird.

§. 27.

Es sey die Gleichung aus §. 22. gegeben, man soll x auf eine Seite ganz allein bringen.

Es ist: $cdgx + abdg = acgy - a^2cd$,

Um x zu befreyen, so muß man abdg auf die rechte Seite hin versetzen, nach der §. 19. gegebenen Regel, dieses giebt $cdgx = acgy - a^2cd - abdg$; nun dividire man auf beyden Seiten mit cdg, so erhält man

$$x = \frac{acgy - a^2cd - abdg}{cdg}$$

Wollte man y aus der nämlichen Gleichung entwickeln, so würde, nachdem man $-a^2cd$ nach der andern Seite hin versetzt hätte, $cdgx + abdg + a^2cd = acgy$ entstehen, oder indem man beyde Hälften versetzt, und mit acd dividirt, so erhält man $y = \frac{cdgx+abdg+a^2cd}{acg}$

§. 28.

§. 28.

Um x aus der Gleichung §. 25. zu entwickeln, verfahre man so: diejenigen Glieder linker Hand, worin sich x nicht befindet, versetze man nach der rechten Hand hin. Also bekommen wir aus $6a^3 + 6abc + 3ac^2x = 6b^2c - 6ac^2 + 2acdy$ folgende Gleichung: $3ac^2x = 6b^2c - 6ac^2 + 2acdy - 6a^3 - 6abc$. Nun dividire man noch jede Seite mit $3ac^2$, so findet sich:

$$x = \frac{6b^2c - 6ac^2 + acdy - 6a3 - 6abc}{3ac2} =$$

$$= \frac{2b^2}{ac} - 2 + \frac{2dy}{3c} - \frac{2a^2}{c^2} - \frac{2b}{c};$$

Eben so findet sich $y = \frac{6a3 + 6abc + 3ac2x - 6b2c + 6ac2}{2acd}$

oder wenn man jedes Glied auf seinem einfachsten Ausdruck reducirt; $y = \frac{3a^2}{cd} + \frac{3b}{d} + \frac{3cx}{2d} - \frac{3b2}{ad} + \frac{3c}{d}$.

§. 29.

Aus den zwey vorhergehenden Gleichungen, in denen wir die Brüche wegschafften, und nachher die unbekannten Größen zu entwickeln suchten, können wir leicht den Gebrauch sehen, welchen wir zu diesen Behuf von der Addition, Subtraction, Multiplikation und Division machen.

Durch die Multiplikation schafft man alle Brüche aus der Gleichung; durch die Versetzung (Transposition), oder durch Hülfe der Addition und der Subtraction, bringt man alle Glieder zusammen, welche die unbekannte Größe enthalten, und durch die Division befreyet man sie von allen Größen, durch welche sie multiplicirt ist, dergestalt, daß sie sich allein auf einer Seite der Gleichung befindet, und ihr Werth ist durch die andere Hälfte ausgedrückt.

§. 30.

In beyden Gleichungen, von denen wir so eben das Detail der Auflösung gegeben haben, befanden sich die unbekannten Größen, jede nur in einem Gliede der Gleichung, es kömmt nur darauf an, zu zeigen, wie wir verfahren müssen, wenn die unbekannte Größe in mehrern Gliedern sich befindet.

§ 31.

Exempel mögen es zeigen. Es sey die Gleichung $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$ gegeben, man will x entwickeln.

Der Anfang muß durch Wegschaffung des Bruchs $\frac{a^2x}{b-c}$ gemacht werden, welches geschiehet, wenn man alle Glieder mit $b-c$ multiplizirt; hierdurch erhält man:

$$a^2x + bdc - c^2d = b^2x - bcx - abc + ac^2.$$

Nun muß man ferner alle diejenigen Glieder, worin sich x befindet, auf einer Seite vereinigen, und auf der andern Seite alle diejenigen Glieder, worin x sich nicht befindet; dieses giebt $a^2x - b^2x + bcx = -abc + ac^2 - bcd + c^2d$.

Nun wird man leicht einsehen, daß die linke Seite der Gleichung ein Produkt aus $a^2 - b^2 + bc$ und x ist; daher auch $(a^2 - b^2 + bc)\,x = -abc + ac^2 - bcd + c^2d$. Dividirt man nun mit $a^2 - b^2 + bc$ auf beyden Seiten, so findet man: $x = \frac{ac^2 - abc - bcd + c^2d}{a^2 - b^2 + bc}$

§. 32.

Hätte man $ax + bx = a^2 - b^2$, so folgt:

$$(a+b)x = a^2 - b^2$$

und $$x = \frac{a^2 - b^2}{a+b} = \frac{(ab)\,(a-b)}{a+b} = a - b$$

§. 33.

§. 33.

Wenn man aus einer Gleichung, die zwey unbekannte Größen hat, als: $cx+dy=b^2$, eine der unbekannten Größen, etwa x entwickelt, so hat man $x=\frac{b2-dy}{c}$; aber y rechter Hand ist ja nicht bekannt, daher der Ausdruck $\frac{b2-dy}{c}$, x nicht geben kann.

Gesetzt aber, die Bedingungen der Aufgabe, aus welcher die vorhergehende Gleichung entspringt, geben auch $x+y=a$, so findet sich hier $x=a-y$. Da nun x in der einen Gleichung denselben Werth hat, als in der andern, so folgt daß $\frac{b2-dy}{c}=a-y$; eine Gleichung, worin nur eine unbekannte Größe y ist, wenn diese bekannt wäre, so giebt sie von a abgezogen den Werth von x.

y zu haben verfährt man so:

es ist $\frac{b2-dy}{c}=a-y$

mit c auf beyden Seiten multiplizirt,

giebt $b^2-dy=ca-cy$

Ist nun c größer als d, so addirt man auf beyden Seiten $+cy$, wäre aber $c<d$, müßte man $+dy$ addiren; wir wollen das erstere annehmen, so erhalten wir:

$b^2+cy-dy=ca$ b^2 subtrahirt,

giebt $(c-d)\,y=ca-b^2$ mit c-d dividirt,

$y=\frac{ca-b^2}{c-d}$

§. 34.

Bemerkung.

Warum man darnach sehen muß, ob c größer oder kleiner als d ist, geschiehet bloß, um den Werth von y positiv zu finden.

§. 35.

Um nun jetzt den Ausdruck für den Werth von x zu haben, so muß man den gefundenen Ausdruck für y in eine von den beyden gegebenen Gleichungen substituiren. Substituirt man ihn in der Gleichung $cx+dy=b^2$, so muß man, da sich hier y in d multiplizirt befindet, auch seinen Werth gleichfalls mit d multipliziren, und diese Gleichung wird alsdann folgende seyn:

$cx+d.\ \frac{ac-b^2}{c-d}=b^2$ mit c−d multiplizirt,

giebt $(c-d)cx+acd-db^2=b^2c-db^2$

$+acd-db^2$ subtrahirt

kommt $(c-d)cx=b^2c-acd$ mit (c−d) c dividirt,

giebt $x=\frac{b^2c-acd}{(c-d)c}=\frac{b^2-ad}{c-d}$

Anstatt den Werth für y in der Gleichung $cx+dy=b^2$ zu substituiren, so substituirt man sie in dieser $x+y=a$, und man hat alsdann $x+\frac{ac-b2}{c-d}=a$

oder $x=a-\frac{ac-b2}{c-d}=\frac{-ad-(-b2)}{c-d}=\frac{b2-ad}{c-d}$

also sind die beyden Werthe der unbekannten Größen gefunden worden.

§. 36.

Um den Werth der beyden unbekannten Größen der Gleichungen $cx + dy = b^2$, und $x + y = a$ durch die zweyte Methode (§. 13.) zu bestimmen, so nimmt man sogleich den aus der ersten Gleichung gefundenen Werth für x, und substituirt ihn an seiner Stelle in der andern Gleichung; dieses macht, daß sie aus dieser Gleichung verschwindet, die, da sie nun nicht mehr als eine unbekannte hat, sehr leicht resolvirt werden kann.

Die ganze Procedur stehet so:

aus $cx + dy = b^2$ erhält man $x = \frac{b2 - dy}{c}$

Nun ist $x + y = a$; also auch

$$\frac{b2 - dy}{c} + y = a,$$

und hieraus findet sich endlich

$y = \frac{ac - b2}{c - d}$, wie nach der ersten Methode.

Daher kann man sich mit gleichem Vortheil der einen oder der andern Methode bedienen, um Gleichungen, die mehr als eine unbekannte Größe haben, aufzulösen.

§. 37.

Ich will hier noch einer Methode gedenken, die öfters sehr vortheilhaft angewandt werden kann.

Man multiplizire die eine Gleichung mit einem Faktor, der als Coëficient in der andern Gleichung bey der zu eliminirenden oder wegzuschaffenden Größe stehet, und ziehe alsdann diese Gleichung von der ersten ab, so erhält man eine Gleichung, worin nur noch eine unbekannte Größe enthalten ist.

Es sey z. B. $cx+dy=b^2$ und $x+y=a$, und es sollte x eliminirt werden,

so ist: $c(x+y)=$ $cx+cy=ca$ subtrahirt

$dy-cy=b^2-ca$

$(d-c)y=b^2-ca$

$y=\frac{b^2-ca}{d-c}$

Sollte y eliminirt werden, so müßte man $x+y=a$ mit d multipliziren und alsdann dieses Produkt von der andern Gleichung abziehen, so bekäme man eine Gleichung, worin nur x enthalten ist, welche man alsdann nach den schon bekannten Methoden finden würde.

§. 38.

Anmerk. Diese Methode hat große Vorzüge vor den beyden vorhergehenden. Zusammengesetzte Fälle kommen bey den Aufgaben vor; hier nur noch folgende zwey Beyspiele.

Wenn die Coëfficienten der unbekannten Größe, welche man wegschaffen will, einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man das Verfahren, wodurch man die Coëfficienten gleichmacht, ungefähr auf die nämliche Art abkürzen, wie bey dem ähnlichen Fall der Reduktion von zwey Brüchen auf einerley Benennung. Man dividirt nämlich die zwey Coëfficienten durch ihren gemeinschaftlichen Theiler, und multiplicirt jeden derselben mit dem Quotienten der Division des andern durch diesen gemeinschaftlichen Theiler. Z. B.: man habe die zwey Gleichungen

$\left.\begin{matrix}6x+35y=170\\9x+28y=157\end{matrix}\right\}$ Die Coëfficienten von x haben

den gemeinschaftlichen Theiler 3. Dividirt man sie mit diesen gemeinschaftlichen Theiler, so erhält man die Quotienten 2 und 3. Um also dieselbe gleich zu machen, darf man nur auf beyden Seiten der ersten Gleichung

chung durch 3, und auf beyden Seiten der andern durch 2 multiplizieren. Dadurch bekommt man:

$$\begin{array}{r} 18x + 105y = 510 \\ \underline{18x + 56y = 314} \text{ subtrahirt} \\ 49y = 196 \\ \text{Hieraus} \quad y = 4 \end{array}$$

Eben so haben die Coëfficienten von y den gemeinschaftlichen Theiler 7. Die Quotienten ihrer Divisionen durch diesen gemeinschaftlichen Theiler sind 5 und 4. So hat man, um dieselbe gleich zu machen, nur auf beyden Seiten der ersten Gleichung mit 4, und auf beyden Seiten der zweyten mit 5 zu multiplizieren, und bekommt:

$$\begin{array}{r} 24x + 140y = 680 \\ \underline{45x + 140y = 785} \text{ Die obere Gleichung von der untern subtrahirt, giebt} \\ 21x = 105 \\ \text{folglich } x = 5 \end{array}$$

Eben so geben $\begin{cases} 12x + 25y = 234 \\ 16x + 15y = 202 \end{cases}$ die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{r} 48x + 100y = 936 \\ \underline{48x + 45y = 606} \\ 55y = 330 \\ \text{folglich} \quad y = 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36x + 75y = 702 \\ \underline{80x + 75y = 1010} \\ 44x = 308 \\ \text{folglich } x = 7 \end{array}$$

§. 39.

Wenn die besondern Bedingungen einer Aufgabe drey Gleichungen geben, als $x + y + z = a$; $x + y - z = b$ und $x + z - y = c$, in welchen x, y und z unbekannte Größen sind.

Da diese Aufgabe eben so viele Gleichungen giebt, als sie unbekannte Größen enthält, so ist sie bestimmt.

Aus

Aus der ersten Gleichung findet sich $x = a - y - z$. Setzt man diesen Werth von x in die beyden andern, so verwandelt sich die zweyte Gleichung in $a - y - z + y - z = b$, oder $a - 2z = b$; hieraus zieht man $z = \frac{a-b}{c}$, und die dritte Gleichung wird nach der obigen Substitution seyn $a - y - z - y + z = c$; oder $a - 2y = c$, mithin $a - c = 2y$, folglich $y = \frac{a-c}{2}$.

Substituiren wir gegenwärtig die für z und y gefundenen Werthe, in dem aus der ersten Gleichung für x gefundenen Werth, so wird man haben $= a - \frac{a+c}{2} - \frac{a+b}{2}$ und also indem man die Brüche wegschaft

$2x = 2a - a + c - a + b$, welches sich auf $2x = b + c$ reducirt, und also $x = \frac{b+c}{2}$

Also $x = \frac{b+c}{2}$

$y = \frac{a-c}{2}$

und $z = \frac{a-b}{2}$

§. 40.

Oder man verfahre, um hier den Werth der unbekannten Größen zu bestimmen, folgender Gestalt.

Ziehe die zweyte Gleichung von der erstern ab, so fallen hier sogleich die beyden unbekannten Größen x und y weg, und es kömmt $2z = a - b$ daher $z = \frac{a-b}{2}$; nun ziehe die dritte Gleichung von der ersten ab, so fallen x und z weg, und es bleibt $2y = a - c$, folglich $y = \frac{a-c}{2}$; ferner addire die zweyte und dritte Gleichung, so fallen dadurch y und z weg, und es ergiebt sich $2x = b + c$, mithin $x = \frac{b+c}{2}$.

Anmerk.

Anmerk Diese Auflösung ist offenbar der ersten vorzuziehen, nur ist Schade, daß ich keine allgemeine Regel angeben kann, wie man in jedem Falle den kürzesten Weg trifft; alles beruhet hier auf Uebung und Einsicht des Algebraisten, der sogleich aus den ihm vorliegenden Gleichungen beurtheilt, wie er am leichtesten seinen Zweck erreicht.

§. 41.

Wenn die aufzulösenden Aufgaben mehr als drey unbekannte Größen haben, und ihre Bedingungen auch immer eben so viele besondere Gleichungen geben, so wird man den Werth von jeder unbekannten Größe, nach der im §. 39. enthaltenen Methode bestimmen können.

§. 42.

Gesetzt, die Bedingungen einer Aufgabe, welche vier unbekannte Größen enthält, gäbe die folgenden vier Gleichungen, in welchen u, x, y und z die unbekannten Größen sind:

1) $u + x + y - z = a$
2) $u + x + z - y = b$
3) $u + y + z - x = c$
4) $x + y + z - u = d$

So nimmt man den Werth einer dieser unbekannten Größen, z. B. von u, in jeder Gleichung, und man wird haben:

1) $u = a - x - y + z$
2) $u = b - x - z + y$
3) $u = c - y - z + x$
4) $u = x + y + z - d.$

Vergleicht man hier die beyden ersten Werthe von u mit einander, so hat man:

5)

5) $a - x - y + z = b - x - z + y$

in welcher sich u nicht mehr befindet.

Vergleicht man eben so die beyden letzten Werthe, so geben sie

6) $c - y - z + x = x + y + z - d$

Aus No. 5. folgt $2z = 2y - a + b$

Aus No. 6. folgt $2z = -2y + + c + d$

dieses giebt wiederum

$$2y - a + b = -2y + c + d$$

woraus sich $y = \frac{a - b + c + d}{4}$ findet.

Substituirt man diesen Werth von y in einem oder dem andern für 2z gefundenem Werthe, so ergiebt sich z. B. in dem ersten Werthe

$$2z = \frac{a - b + c + d}{2} - a + b$$

und also $z = \frac{-a + b + c + d}{4}$

Nimmt man nun jetzt zwey Werthe von y oder von z in den ersten Gleichungen, wo u sich nicht mehr befindet, (diese Werthe werden weiter keine unbekannte Größen als x und y oder z haben) und substituirt die daraus entstehende Gleichung den Werth von y oder von z, so wird sie bis zu einer unbekannten Größe x reducirt seyn, deren Werth man alsdann leicht findet.

Substituirt man endlich in einer von den Gleichungen, welche den Werth von u bestimmen, den bereits gefundenen Werth der unbekannten Größe x, y und z, so wird man den Werth der vier unbekannten Größen von der bestimmten Aufgabe haben.

Man findet $x = \frac{a + b - c + d}{4}$

und $u = \frac{a + b + c - d}{4}$.

Man

Man würde dieselben Werthe auch nach §. 13. finden.

§. 43.

Anmerk. Wenn es sich treffen sollte, daß bey der Vergleichung der Werthe einer und eben derselben unbekannten Größe, die man aus den verschiedenen Gleichungen der Aufgaben genommen hat, in der neuen daraus entstehenden Gleichung beyde Hälften ganz gleich sind, nämlich beyde Hälften aus gleichviel und gleichen Gliedern mit gleichen Zeichen bestehen: so ist klar, daß diese Gleichung gar keinen Werth bestimmt. Es fällt alsdann eine Gleichung weg. Wenn die Aufgabe wirklich eine oder mehrere unbekannte Größen mehr enthält, als ihre Bedingungen von einander verschiedene Gleichungen geben, so ist die Aufgabe unbestimmt.

§ 44.

Ehe ich zeige, wie man die Werthe der unbekannten Größen aus den Gleichungen §. 42. noch auf eine bequemere und sinnreichere Art findet, so will ich hier einen, für die Algebra sehr wichtigen Satz mittheilen.

§. 45.

Aus der Summe und Differenz zweyer Zahlen findet sich die größte, wenn man zu der halben Summe die halbe Differenz addirt; die kleinste, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt.

Beweis.

Es sey die Summe zweyer Zahlen x und y gleich s und die Differenz gleich d, so ist offenbar:

1)

auch 1) $x + y = s$; und wenn x größer als y
2) $x - y = d$
addirt
giebt $2x = s + d$
folglich $x = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$ die größte.

Wird No. 2. von No. 1. subtrahirt, so kommt
$2y = s - d$
folglich $y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$ die kleinste.

§. 46.

Durch die Addition und Subtraktion fanden wir hier x und y sehr bequem; die bekannte gewöhnliche Methode würde nicht so geschwind die Werthe geben. Aber noch mehr, die gegebene Auflösung stimmt mit der Art, wie die Alten dergleichen Aufgaben aufzulösen pflegten, so ganz überein, daß es vielleicht Vielen meiner Leser gefallen wird, hier die Uebereinstimmung zu lesen.

Nach Art der Alten müßten wir, um aus der gegebenen Summe und Differenz zweyer Zahlen die Zahlen selbst zu finden, folgendermaßen schließen.

Die Summe entsteht, wenn ich beyde Zahlen zusammen addire; also besteht sie aus der größern und kleinern Zahl.

Die Differenz entsteht, indem ich die kleinere von der größern Zahl subtrahire, also bestehet die größere Zahl aus der kleinern und der Differenz.

Addire ich nun die Differenz zur Summe, so erhalte ich offenbar ein Agregat, welches aus der größern der kleinern Zahl und der Differenz bestehet, folglich das Zweyfache der größern Zahl, und daher brauch ich nur mit 2 in dieses Agregat zu dividiren, oder, welches

einer-

einerley ist, jeden Theil, nämlich die Summe und die Differenz, durch 2 dividiren, um die größere Zahl zu haben.

Subtrahire ich aber die Differenz von der Summe, so bleibt unstreitig das Zweyfache der kleinern Größe, und daher dividire ich mit 2 in diesen Rest oder in dessen Theile, um die kleinere Zahl zu haben.

Diese Schlüsse stimmen ganz genau mit unsern gemachten algebraischen überein, letztere haben noch den Nachtheil, daß man das Gesuchte fast ganz mechanisch findet, was nach der Methode der Alten nicht geschieht, nur sind ihre Methoden selten kurz, und in sehr zusammengesetzten Fällen äußerst weitläuftig, schwer, oder vielleicht gar unmöglich, indem wir die Menge verketteter Schlüsse nicht mehr überschauen können, und hier unterstützt uns die Algebra, und hilft uns da noch fort, wo jede andere bekannte Methode uns verläßt.

Es ist gewiß, daß ihre Methoden eben so weit reichen, als unsere algebraischen, nur fordern sie weit mehr Kopf und Fleiß, als vielleicht je ein Mensch seiner Natur nach haben kann; überdem sieht man jetzt fast mehr auf die praktischen Vortheile, die erreicht werden sollen, und legt eben keinen großen Werth auf bloße Spekulationen, die nur für die Metaphysik, nicht für das gemeine Leben gehören.

§. 47.

Anmerk. Mittelst des §. 45. gelehrten Satzes können eine Menge Aufgaben, die im ersten Theile dieses Werks stehen, ganz leicht ohne Algebra aufgelöst oder gerechnet werden, nur muß man die Einkleidung der Aufgabe nicht zum Wesentlichen derselben rechnen. Beobachtet man dieses, so wird man im ersten Theile Seite 12. und 13. gleich 4 Aufgaben finden,

finden, worin alles immer nur darauf ankam, aus der Summe und Differenz zweyer Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

§. 48.

Jetzt wollen wir nun diesen Satz zur Auflösung der Gleichungen §. 42. anwenden.

Man addire No. 1. und 2, so kömmt:

$$2u + 2x = a + b$$

Man subtrahire No. 3. und 4. von einander, so erscheint

$$2u - 2x = c - d$$

Nun ist nach §. 45. $2u = \frac{a+b}{2} + \frac{c-d}{2}$

also $u = \frac{a+b+c-d}{4}$.

ferner §. 45. $2x = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{c-d}{2}\right)$

folglich $x = \frac{a+b+d-c}{2}$

Eben so findet sich, wenn man No. 1. und 2. von einander subtrahirt:

$$2y - 2z = a - b.$$

ferner No. 3. und 4. addirt giebt:

$$2y + 2z = c + d.$$

Also nach §. 45. $2y = \frac{a-b}{2} + \frac{c+d}{2}$

und $2z = \frac{c+d}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)$

folglich $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ und $x = \frac{c+d-a+b}{4}$

§. 49.

Diese Auflösung ist von mir, und wird schwerlich bequemer aufgelöst werden können, auch stimmt wiederum diese algebraische Auflösung ganz mit der Auflösungsmethode der Alten überein. Die Weitläuftigkeit, worin man nothwendig eine schriftliche Auflösung, nach Methode der Alten führen muß, verhindert mich, sie mitzutheilen; indessen ist sie nicht schwer, und ich rathe Anfängern, welchen die Bildung ihres Verstandes interessirt, sie allein zu versuchen: und die Lehrer ersuche ich, ihre ihnen anvertraute Eleven dazu anzuhalten, weil wohl keine Sache mehr den Verstand schärft, und zugleich durch ihr Vergnügen so belohnt, als dieses.

§. 50.

Ich endige hier die Lehre von den bestimmten Gleichungen des ersten Grades, und werde gelegentlich bey den in diesen und in dem folgenden Theile vorkommenden Aufgaben noch manche Kunstgriffe beybringen, welche die Auflösungen ungemein verkürzen werden. Jetzt will ich von den Verhältnissen und Proportionen etwas vollständiger handeln, als im ersten Theile dieses Werks Seite 59. §. 63. geschehen ist.

§. 51.

Von den Verhältnissen überhaupt.

Wenn wir Größen von einerlei Art mit einander vergleichen, oder ihr Verhältniß gegen einander bestimmen wollen: so kann dieses, wie wir leicht gewahrnehmen, nur auf zweyerley Art geschehen.

Denn, entweder können oder wollen wir bestimmen, um wie viel Einheiten die eine Zahl größer oder kleiner, als die andre ist, oder wie vielmal die Eine

oder

oder ein aliquoter (gleicher) Theil derselben in der andern enthalten sey.

Die erste Vergleichung giebt ihr **arithmetisches Verhältniß** (ratio arithmetica). Durch die zweyte Art der Vergleichung erhält man ihr **geometrisches Verhältniß** (ratio geometrica).

Z. B. Das arithmetische Verhältniß von 15 zu 3, wird durch 12, als den Unterschied beyder Zahlen, angegeben, und wird durch Zeichen so ausgedrückt: $15 - 3 = 12$.

Hingegen erhält man das geometrische Verhältniß dieser Zahlen, wenn man die eine Zahl durch die andere, oder durch einen aliquoten Theil derselben dividirt: also $\frac{15}{3} = 5$ oder $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; bestimmen das geometrische Verhältniß dieser Zahlen, denn es zeigt an, daß 15 fünf mal größer ist als 3, oder 3 nur $\frac{1}{5}$ von 15 ist; auch erforscht man das geometrische Verhältniß, wenn ich sage $\frac{1}{5}$ von 15 ist in der andern Zahl 3 gerade einmal enthalten. Sie wird in Zeichen so geschrieben: $15 : 3 = 5$.

§. 52.

Anmerk. Warum die eine Art der Vergleichung das arithmetische Verhältniß, die andere das geometrische Verhältniß genannt wird, läßt sich nicht aus Gründen einsehen; beyde werden in der Arithmetik sowohl, als in der Geometrie gebraucht. Die Alten verstanden unter Verhältniß keine andern, als die geometrischen, nur die Neuen haben diesen Begriff auch auf die arithmetische Vergleichung zweyer Zahlen ausgedehnt. Daher pflegt man noch allemal das geometrische Verhältniß zu verstehen, wenn dieses Wort ohne eines von beyden Beywörtern gesetzt wird.

§. 53.

§. 53.

Aus der Art, wie man das Verhältniß zweyer Zahlen schreibt, (§. 51.) erhellet, daß eine Zahl, welche man will, zur linken, die andere ihr zur rechten steht. Diese Zahlen nennt man die Glieder des Verhältnisses, und man kann daher in jedem Verhältniß ein Glied als das **vorhergehende** (terminus antecedens), und das andere als das **folgende** (t. consequens) ansehen. Man pflegt auch die steigenden Verhältnisse (r. ascendens) von fallenden (r. descendens) zu unterscheiden, indem bey jenen das Vorderglied kleiner als das Hinterglied, bey diesen aber umgekehrt, das Hinterglied kleiner, als das Vorderglied ist.

§. 54.

Von den arithmetischen Verhältnissen insbesondere.

Es seyen a und b Größen einer Art, so ist nach §. 51. ganz allgemein a − b der Ausdruck für das arithmetische Verhältniß beyder Größen; und man kann allemal $a - b = \pm d$ finden, wo das obere Zeichen gilt, wenn a größer, und das untere, wenn a kleiner ist als b, und dabey ist offenbar d mit a und b von einerley Art, oder gleichartig. Lassen wir nun unbestimmt, ob d positiv oder negativ sey, so ist unter der angeführten Bedingung allemal:

$$a - b = d, \text{ und folglich auch}$$

$$b + d = a;\ b = a - d;\ \text{und}\ b - a = -d.$$

Da man also zwo gleichartige Größen immer von einander subtrahiren kann, so kann man auch dieselben allemal im arithmetischen Verhältnisse betrachten. Ferner erhellet aus obigen, und auch aus der Addition entgegengesetzter Größen, daß man die Differenz dieser

Größen, welche auch die Differenz ihres arithmetischen Verhältnisses heißt, wenn man das nachfolgende Glied negativ nimmt, und darauf beyde Glieder nach algebraischer Art addirt. Auch ist allemal das vorhergehende Glied die Summe des nachfolgenden Gliedes und der Differenz, so wie das nachfolgende Glied der Unterschied zwischen der Differenz und dem vorhergehenden Gliede ist. Endlich verwandelt sich die Differenz des Verhältnisses in die entgegengesetzte Größe, wenn man das nachfolgende Glied zum vorhergehenden macht, ohne ihre Größe zu verändern.

§. 55.

Wenn $a-b=d$ ist, so ist

1) $(a+c)-b=d+c$
2) $a-(b-c)=d+c$
3) $a-(b+c)=d-c$
4) $(a-c)-b=d-c$
5) $(a\pm c)-(b\pm)=d$

No. 1. und 2. heißt in Worten ausgedrückt:

Die Differenz des Verhältnisses wird um eben so viel vergrößert, um so viel das vorhergehende Glied zu, oder das nachfolgende abnimmt.

No. 3. und 4. heißt:

Die Differenz des Verhältnisses nimmt um eben so viel ab, um so viel das nachfolgende Glied zu, oder das vorhergehende abnimmt.

No. 5. sagt:

Die Differenz des Verhältnisses bleibt unverändert, man mag zu beyden Gliedern des Verhältnisses gleiches addiren oder subtrahiren.

Wir

Wir sehen, daß wir durch leichte Veränderungen obiger Gleichungen Lehrsätze herleiten können, und es ist nicht schwer, aus denselben Regeln für bestimmte Veränderungen der arithmetischen Verhältnisse zweyer Größen herzuleiten, so wie auch ihre Anzahl mit geringer Mühe vermehrt werden kann.

§. 56.

Wenn $a-b=d$ ist, so ist $a=b+d$ und $b=a-d$, desgleichen $b-a=-d$. Jedes arithmetische Verhältniß $a-b$ kann daher durch $(b+d)-b$, oder $a-(a-d)$, und wenn man d negativ nimmt, oder die Differenz auf die Art sucht, daß man das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden abzieht, durch $a-(a+d)$ ausgedrückt werden.

Mittelst dieser Konstruktionen des arithmetischen Verhältnisses, kann man sich augenscheinlich von der Wahrheit der im vorhergehenden §. enthaltenen Sätze überzeugen, die man auch ohnedies bald einsieht. Größern Nutzen aber wird der Gebrauch derselben in der Folge gewähren.

§. 57.

Von den geometrischen Verhältnissen insbesondere

Wenn wir fragen, wie groß eine Sache sey, und dabey verlangen, daß man uns die Größe der Sache durch Worte bekannt machen solle, ohne sie selbst vorzuzeigen, so verlangen wir eigentlich ihr geometrisches Verhältniß, mit einer uns bekannten Größe zu wissen. Z. B. Wer die Größe eines Berliner Scheffels von mir zu wissen verlangt, dem muß ich entweder den Scheffel selbst vorzeigen, oder ich muß die Größe desselben mit einer andern ihm bekannten Größe vergleichen

und anzeigen, wie groß die Größe des Scheffels gegen diese ihm bekannte Größe sey. Sage ich: der Scheffel enthalte eben so viel als vier Viertel; so setze ich voraus, daß der Fragende die Größe eines Viertels kenne; sonst müßte er weiter fragen, wie groß ist denn ein Viertel?

§. 58.

Um zwey Größen mit einander geometrisch vergleichen zu können, müssen sie einerley Art seyn: Wären nun a und b gleichartige Größen, a das vorhergehende und b das nachfolgende Glied eines geometrischen Verhältnisses, so ist allemal

$$1)\ a : b = \frac{a}{b} = e$$

e ist hier der Name des geometrischen Verhältnisses, so wie d in §. 54. den Namen des arithmetischen Verhältnisses bedeutet; man nennt auch e den Exponenten des Verhältnisses. Er zeigt an, wie vielmal a in b enthalten ist.

$$\text{Aus } \frac{a}{b} = e, \text{ folgt } 2)\ a = be;$$

$$\text{und } 3)\ a = \frac{a}{e};\ \text{auch } 4)\ \frac{b}{a} = \frac{1}{e};$$

Aus No. 1. erhellet, daß wir den Exponenten durch die Division des vorhergehenden Gliedes durch das nachfolgende finden. No. 2. zeigt, daß wir das vorhergehende Glied aus dem nachfolgenden finden, wenn wir solches mit dem Exponenten multipliziren; ferner zeigt No. 3., daß das nachfolgende Glied gefunden wird, wenn wir das vorhergehende durch den Exponenten dividiren.

Endlich No. 4. zeigt: daß sich der Exponent aus einem Multiplikator in einen gleich großen Divisor, und umgekehrt, verwandelt, wenn man die Glieder des geometrischen Verhältnisses verwechselt, das heißt, wenn

man das vorhergehende Glied zum nachfolgenden, und dieses zum vorhergehenden macht.

Der Exponent e ist nun entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl, je nachdem a selbst oder $\frac{1}{n}$ a, d. i. ein aliquoter Theil von a in b n mal entstanden ist.

Aus der Arithmetik ist bekannt, daß z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, . . . $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ . . . nie ganz genau angegeben werden können; wenn also a eine solche Irrektionalgröße wäre, so leuchtet ein, daß es sich nicht ereignen kann, daß sich b weder aus a, noch dessen aliquoten Theilen als $\frac{1}{n}$ b, $\frac{1}{n+1}$ b, $\frac{1}{n+2}$ b u. s. w., völlig genau zusammen setzen läßt, und daß bey einem jeden zur Ausmessung der Größe a angenommenen Theile von b, in a allemal ein kleiner Rest von der Beschaffenheit übrig bleibt, daß, wenn man nur $\frac{1}{n}$ b, d. h. einen noch so kleinen genau messenden Theil von b hinzusetzen wollte, eine Größe entstände, die a um einen gewissen Theil überträfe; wenn man hingegen dieses $\frac{1}{n}$ b wegließe, eine Größe behielte, die kleiner wäre als b. Wenn sich nun gleich a aus b und dessen aliquoten Theilen nicht vollkommen genau ausdrücken läßt, so hat man es doch allemal in seiner Gewalt, einen aliquoten Theil von b zur Ausmessung der a so anzunehmen, daß der gedachte Rest nicht innerhalb der Grenzen einer angeblichen Größe enthalten ist; d. h. man kann nicht nur verlangen, daß er kleiner als $\frac{1}{n}$ sondern kleiner, wie jede angebliche Größe werde.

Um dieses zu erläutern, so nehme man an, man verlange, daß der Rest kleiner als $\frac{1}{n}$ seyn soll. Man

denke

denke sich zu diesem Ende die Größe b in n gleicher Theile zerlegt vor, deren jeder $n = q$. Untersuche nun wie viele solcher Theile, deren jeder $\frac{1}{n} b = q$, in a genau enthalten sind. Gesetzt nun, man fände daß q in a, m mal enthalten wäre, dann aber noch ein Rest r übrig bliebe der kleiner als q wäre. In diesem Falle würde $a = m.q + r = m.\frac{1}{n} b + r = \frac{m}{n} b + r$. demnach $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{r}{b}$.

Da nun der Voraussetzung gemäß $r < \frac{1}{n} b$ seyn r muß, also auf $\frac{r}{b} < \frac{1}{n}$, so ist auch

$$a > \frac{m}{n} b \text{ und zugleich}$$

$$a < \frac{m+1}{n}$$

wie groß auch immer n angenommen und m gefunden werden mag.

Drückt nun die Größe e auch den Exponenten der Verhältnisse dieser Art aus; d. h. wird $e = \frac{m}{n} + \frac{r}{b}$ gesetzt, so ist ba : a die allgemeine Form eines jeden geometrischen Verhältnisses.

Es besteht also der Exponent solcher Verhältnisse allemal aus zwey Theilen, nämlich aus einem bestimmbaren und bekannten Theile $\frac{m}{n}$ und aus einem unbestimmbaren und unbekannten Theile $\frac{r}{b}$, jedoch weiß man von diesem, daß er kleiner als $\frac{m}{n} b$ ist.

Dieser Rest r ist $< \frac{1}{n} b$ d. h. kleiner als jeder aliquote Theil von b, der sich noch angeben läßt, so ist auch $\frac{m}{n}$ allemal größer, als jede Zahl, die kleiner

als

als $\frac{a}{b}$ ist, sie mag ihr so nahe kommen, als man will; wenn nur noch ein Unterschied zwischen ihr und $\frac{a}{b}$ vorhanden ist. Gesetzt Q wäre eine solche Zahl, die $\frac{a}{b}$ sehr nahe käme, doch kleiner als sie wäre:

so ist also $Q < \frac{a}{b}$

folglich $Q - \frac{a}{b} = d$

also $\frac{a}{b} = Q + d$

Da man nun m so groß, als man will, folglich den Bruch $\frac{1}{n}$ so klein, als man will, annehmen kann, so setze man $\frac{1}{n} < d$; so ist alsdann nach den vorhergehenden

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{r}{b}$$

folglich $\frac{m}{n} + \frac{r}{b} = Q + d$

und da $d < \frac{1}{n} < \frac{r}{b}$

so ist $\frac{m}{n} > Q$.

Solche Verhältnisse nun, welche so beschaffen sind, daß kein aliquoter Theil der b, noch b selbst zur Ausmessung der Größe a dienen kann, nennt man **inkommensurabel** Andre Verhältnisse, bey welchen ein gemeinschaftliches Maaß Statt findet, nennt man **kommensurabel**. Hieraus entspringen die Rational- und Irrationalverhältnisse. In jenen sind beyde Glieder, a und b kommensurabel, in diesen hingegen inkommensurabel. Rationalverhältnisse haben zu ihren Exponenten bestimmte Zahlen; irrationale aber nicht.

§. 59.

§. 59.

Man kann also statt a : b = e, allemal schreiben be : b, oder a : $\frac{a}{e}$, und wenn man $\frac{1}{e} = m$ setzt, a : am schreiben.

§. 60.

Wenn a : b = e ist, so ist auch aq : bq = e, weil $\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq}$ ist; auch ist $\frac{a}{q} : \frac{b}{q} = e$, weil $\frac{a : q}{b : q} = \frac{a}{b}$ ist; dahingegen ist qa : b = qe, weil $\frac{qa}{b} = q\frac{a}{b} =$ qe ist; auch ist a : qb = $\frac{e}{q}$, weil $\frac{a}{qb} = \frac{a}{q} : q = e : q = \frac{e}{q}$ ist.

Ferner da $\frac{a}{b} + n = e + n = \frac{a+bn}{b}$ ist, so ist auch a + nb : b = e + n, also ist a + b : b = e + 1; a + 2b : b = e + 2 u. s. w. $n + \frac{b}{q} = n + \frac{1}{a} = \frac{na+b}{e} = \frac{ne+1}{e}$ so ist na + b : a = $\frac{ne+1}{e}$, und also auch a : na + b = $\frac{e}{ne+1}$, weil, wenn $\frac{na+b}{a} = \frac{ne+1}{c}$ auch $\frac{a}{na+b} = \frac{e}{ne+1}$ ist.

Also ist a : a + b = $\frac{e}{e+1}$; a : 2a + b = $\frac{e}{2e+1}$ u. s. w.

Diese Sätze können auch sehr leicht bewiesen werden, wenn man überall, statt a, be setzt, §. 59. Nämlich

lich ich behaupte, es sey $a + nb : b = e + n$; dies giebt $\frac{a+nb}{b} = e+n$ oder da $a = be$, so ist auch $\frac{be+bn}{b} = e+n$ welches offenbar richtig ist.

Eben so ist $a : na + b = \frac{e}{ne+1}$, den $a : na + b = \frac{a}{na+b} = \frac{be}{nbe+b} = \frac{be}{b(ne+1)} = \frac{e}{ne+1}$. Aus ähnlichen Gründen ist auch $a - nb : b = e - n$; $a : b - na = \frac{e}{1-ne}$ und $b - na : a = \frac{1-ne}{e}$. Anfänger können sich diese Sätze zur Uebung in Worte übersetzen.

§. 61.

Anmerk. Die Ursache, warum wir in geometrischen Verhältnissen das vorhergehende Glied zur linken, das nachfolgende zur rechten, und zwischen beyde zwey Punkte setzen, liegt in ihrer Erklärung §. 51. Indessen sind Verhältnisse und Quotienten nicht einerley, denn der Quotient oder Exponent zeigt nur das geometrische Verhältniß an, etwa, wenn ich mich so ausdrücken darf, wie der Barometer nur die Witterung anzeigt, und nicht die Witterung selbst ist. Bey dem Verhältniß 20 : 5 zeigt der Exponent 4 nur an: wie vielmal die eine Zahl 5 in der andern 20 enthalten sey. Beyde Zahlen, deren arithmetisches oder geometrisches Verhältniß man bestimmen will, können benannte Zahlen einerley Art seyn, alsdann ist die Zahl, welche ihr arithmetisches Verhältniß anzeigt, ebenfalls eine benannte Zahl von derselben Art, aber ihre geometrische Vergleichung giebt allemal eine unbenannte Zahl zum Exponenten.

§. 62.

Von den Verhältnissen.
(Mehrere zugleich betrachtet).

Offenbar sind zwey Verhältnisse einander gleich, wenn die vorhergehenden Glieder derselben aus ihren nachfolgenden Gliedern auf eine und dieselbe Art hervorgebracht werden. Zwey arithmetische Verhältnisse sind also einander gleich, wenn ihre Differenzen einander gleich sind; und zwey geometrische sind einander gleich, wenn ihre Exponenten einander gleich sind, und umgekehrt; gleiche arithmetische Verhältnisse haben gleiche Differenzen, und gleiche geometrische Verhältnisse haben einerley Exponenten.

§. 63.

Arithmetische Verhältnisse können nur alsdann einander gleich seyn, wenn alle Glieder derselben zu einer Art gehören, weil ihre Differenzen immer mit den Größen, die verglichen werden, einerley Art sind, §. 61.; und diese Verhältnisse können nur dann gleich seyn, wenn ihre Differenzen es sind.

Hingegen bey den geometrischen Verhältnissen kann die Gleichheit Statt finden, wenn nur die Glieder jedes Verhältnisses, für sich genommen, gleichartig sind.

§. 64.

Wenn daher a, b, c, h, k Größen von einerley Art sind, so ist, wenn $a-b=d$ und $h-k=\delta$ ist, auch $(a+h)-(b+k)=d+\delta$, und $(a+h)-(b+k)=d-\delta$. Ist $d=\delta$ so wird $(a+h)-(b+k)=2\delta$; und $(a-h)-(b-k)=d-\delta=0$.

Wenn ferner: $a-b=d$
und $b-c=\delta$

so

so wird $(a \pm b) - (\pm b + c) = d + \delta$, es mögen die obern oder die untern Zeichen gebraucht werden. Denn, im ersten Fall wird $(a \pm b) - (\pm b + c) = (a + b) - (b + c) = a - c = d + \delta$ Im zweyten Falle wird $a - b - (-b + c)$ auch $= a - c = d + \delta$, und wenn auch hier $d = \delta$, so ist alsdann $a - c = 2d$.

Es sey $a - b = d$
$b - c = \delta$
so ist $a - c = d + \delta$

es sey ferner $c - f = g$
so ist wieder $a - f = d + \delta + g$

wäre auch $f - m = n$
so wäre wieder $a - m = d + \delta + g + n$

Es ist daher wenn $a - b = d$
$b - c = \delta$
$c - f = g$
$f - m = n$
auch $a - m = d + \delta + g + n$

und so kann man leicht diese Sätze auf noch mehr Verhältnisse ausdehnen. Wäre hier $d = \delta = g = n$, so würde $a - m = 4d$ seyn.

§. 65.

Anmerk. Damit die Anfänger nicht etwa glauben, daß diese Zusammensetzungen der arithmetischen Verhältnisse ohne Nutzen sind: so will ich hier nur erwähnen, daß die sogenannten praktischen Mathematiker sich dieser Zusammensetzungen der arithmetischen Verhältnisse, z. B. beym Nivelliren bedienen, ohne daß sie es leider selbst wissen. Wenn man nämlich von zwey Orten a und m das Gefälle wissen will, so nivellirt man von a bis b, von b bis c, von c bis f, und

endlich

endlich von f bis n, drücken nun diese Buchstaben zugleich die an ihrem Orte an der Nivellirlatte gemessenen Höhen aus, so ist das Gefälle

von a bis b = d
von b bis c = δ
von c bis f = g
von f bis m = n

---

also das Gefälle von a bis m = d + δ + g + n *)

§ 66.

Wenn = a : b = e
und h : m = n

---

so ist ah : bm = en

Beweis. $a : b = \frac{a}{b} = e$

und $h : m = \frac{h}{m} = e$

---

folglich $ah : bm = \frac{ah}{bm}$ en. Ist e = n, so wird

$ah : bm = e^2$

§. 67.

---

*) Wer wird sich wohl wundern, daß die Mathematik so selten die ihr gebührende Achtung erweckt, wenn examinirende Räthe selbst eine Unwissenheit in ihren einfachsten und ersten Grundsätzen zeigen, die den examinirten Candidaten, der sich mit ihr beschäftigt hat, in nicht geringe Verlegenheit setzt? — Bey dem gemöhnlichen Schlag der Candidaten, muß dieß Gleichgültigkeit gegen sie erwecken und den Wahn erzeugen: daß eine mechanisch erlernte Praxis weiter, als eine Praxis, die auf Theorie sich stützt, führe. Hierbey befinden sie sich allerdings sehr wohl, — aber der Staat? — —

§. 67.

Wenn $a : b = c$
und $h : m = n$

so auch $\frac{a}{h} : \frac{b}{m} = \frac{e}{n}$

Beweis. $a : b = \frac{a}{b} = e$

$m : h = \frac{m}{h} = \frac{1}{n}$

folglich $am : bh = \frac{am}{bh} = \frac{e}{n}$

aber $am : bh = \frac{am}{h.} : b = \frac{a}{b} : \frac{b}{m}$ (§. 60.)

mithin $\frac{a}{h} : \frac{b}{m} = \frac{e}{n}$. Ist $e = n$, so wird

$am : bh = \frac{a}{h} : \frac{b}{m} = a$

also $am = bh$, oder $\frac{a}{h} = \frac{b}{m}$.

§. 68.

Wenn $a : b = e$
und auch $h : m = e$

so ist $(a \pm h) : (b \pm m) = e$

das heißt: Ein Verhältniß bleibt unverändert, wenn man die gleichnamigen Glieder eines andern, ihr gleichen Verhältnisses, zu ihren Gliedern addirt oder subtrahirt.

Beweis.

Beweis. Es ist $a : b = be : b$

und $h : m = me : m$

folglich $(a \pm h) : (b \pm m) = (be \pm me) : (b \pm m)$

mithin $\frac{a \pm h}{b \pm m} = \frac{(b \pm m)\, e}{b \pm m} = e.$

Für mehrere Verhältnisse stehet dieser Satz §. 94.

§. 69.

Wenn $a : b = e$

und $b : c = e$

so ist $ab : bc = e^2$ (§ 66.)

folglich $a : c = e^2$ (§. 60.)

Alle diese Sätze von §. 66. bis §. 69. lassen sich sehr leicht auf mehr als zwey Verhältnisse ausdehnen.

§. 70.

Von den Proportionen.

Bisher haben wir in einem Verhältnisse die Beschaffenheit der Glieder untersucht und daraus die Größe der Verhältnisse selbst hergeleitet. Begreiflich kann man in diesen Untersuchungen auf diese Art weiter gehen, und wieder die Verhältnisse selbst mit einander vergleichen und ihre Größen gegen einander bestimmen; natürlich sieht man nicht mehr auf die einzelnen Glieder, sondern auf die Verhältnisse selbst. Zwey mit einander zu vergleichende Verhältnisse können entweder gleich oder ungleich seyn. In diesem Falle ist das eine das größere, das andere das kleinere.

Bey zwey Verhältnissen a, b und c, d finden beständig vier Glieder Statt. Sind nun diese so beschaffen, daß das erste a gegen das andere b eben so groß, als das dritte c gegen das vierte d ist, so sagt man:

man: die beyden Verhältnisse sind einander gleich, und die 4 Größen sind in der angeführten Ordnung proportionel, oder machen eine **Proportion** aus. Man sagt also von zwey gleichen Verhältnissen: ihre Glieder stehen in der Ordnung, in welcher sie in den Verhältnissen auf einander folgen, in **Proportion**: so daß also die Proportion nichts anders als die **Gleichheit zweyer Verhältnisse** ist. Sind die gedachten Verhältnisse arithmetische, so wird auch die Proportion eine **arithmetische Proportion** (proportio arithmetica) genannt, und sind dieselben **geometrische**, so erhält die Proportion diesen Beynamen ebenfalls (proportio geometrica).

Ist also $a - b = g - h$
und $n : m = p : q$
so stehen a, b, g und h in einer arithmetischen, und n, m, p und q stehen in einer geometrischen Proportion.

§. 71.

Eine Proportion besteht also aus zwey Verhältnissen, und daher aus vier Gliedern. Das erste und dritte, ingleichen das zweyte und vierte Glied werden **gleichnamige Glieder**, oder ähnlich liegende (homologi) genannt. Das erste und vierte Glied sind ihre **äußern Glieder**, das zweyte und dritte Glied ihre **mittlern Glieder.** Unter der **Differenz** oder dem **Exponenten** einer Proportion versteht man die, bey den darin befindlichen Verhältnissen, gemeinschaftliche Differenz, oder den Exponenten. Drückt man diese Differenz durch - d, und den Exponenten durch $\frac{1}{e}$ aus, und nennt man dabey die vorhergehenden Glieder beyder Verhältnisse a und c, so ist nach dem festgesetzten Begriff von Verhältniß und Proportion leicht einzusehen, daß

a -

$$a-(a+d)=c-(c+d)$$

ein allgemeiner Ausdruck der arithmetischen, und

$$a : ae = c : ce$$

ein allgemeiner Ausdruck oder Konstruktion der geometrischen Proportion ist.

Gleiche geometrische Verhältnisse haben also gleiche Exponenten, und zu gleichen Exponenten gehören auch gleiche geometrische Verhältnisse. Ungleiche geometrische Verhältnisse haben ungleiche Exponenten, und zu ungleichen Exponenten gehören auch ungleiche geometrische Verhältnisse.

Wenn aber a : c und c : d zwey Irrationalverhältnisse von der Beschaffenheit sind, daß die rationalen Theile ihrer Exponenten immer gleich bleiben, die gleichnamigen aliquoten Theile von b und d mögen so klein angenommen werden, wie man will, so sind die gedachten Verhältnisse allemal einander gleich.

Es ist demnach zu beweisen: daß $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Dieses folgt unmittelbar, wenn man darthun kann, daß $\frac{b}{a}$ nicht $>$ oder $<$ $\frac{d}{c}$ seyn könne.

Gesetzt nun $\frac{b}{a}$ wäre $> \frac{d}{c}$, oder, welches dasselbe ist, $\frac{d}{c} < \frac{b}{a}$, so setze man $\frac{d}{c} = q$ alsdann wäre $q < \frac{b}{a}$, mithin $\frac{m}{n} > q$ (§. 58.). Allein $\frac{d}{c}$ ist $= \frac{m}{n} + \frac{r}{c}$ (§. 58.) also $\frac{m}{n} = \frac{d}{c} - \frac{r}{c} = \frac{d-r}{c}$. Setzt man nun diesen Ausdruck für $\frac{m}{n}$ in den

vori-

vorigen, so folgt $\frac{d-r}{c} > q$ oder $\frac{d-r}{c} > \frac{d}{c}$, welches unmöglich ist. Nimmt man an, $\frac{b}{a}$ wäre $< \frac{d}{c}$, so sey $\frac{b}{a} = q'$, daraus folgt $q' < \frac{d}{c}$, also $\frac{m}{n} > q'$ (§. 58.). Da nun $\frac{b}{a} = \frac{m}{n} + \frac{r}{a}$ ist (§. 58.), so ist $\frac{m}{n} = \frac{b}{a} - \frac{r}{a} = \frac{b-r}{a}$. Demnach $\frac{b-r}{a} > q'$ oder $\frac{b-r}{a} > \frac{b}{a}$, welches wieder unmöglich ist.

Die angegebene allgemeine Form $a : ae = c : ce$ schließt also auch die Irrationalverhältnisse mit ein.

Wer untersucht, wie a aus b entstehet, thut offenbar gerade das entgegengesetzte von demjenigen, der untersucht, wie b aus a entsteht. Deutet man nun die letztere Untersuchung durch das Verhältniß a : b an, so muß die erste durch b : a angezeigt werden. Diese Verhältnisse können demnach als entgegengesetzt betrachtet werden, folglich hat man

$$b : a = -(a : b)$$

der

$$a : b = -(b : a)$$

davon in der Folge Gebrauch gemacht werden soll.

§. 72.

Von den arithmetischen Proportionen.

Wenn $a - b = c - g$, so ist auch $b - a = g - c$, denn die Differenz dieser Proportion ist bloß der vorhergehenden entgegengesetzt, welches man auch gleich einsieht, wenn man die allgemeine Konstruktion dafür setzt. Nämlich $a - (a + d) = c - (c + d)$, hier ist die Differenz $-d$ also auch $(a + d) - a = (c + d) - c$, und hier ist die Differenz $+d$

ferner ist auch $a - c = b - g$
denn offenbar ist $a - c = (a + d) - (c + d)$
das heißt: In jeder arithmetischen Proportion können die beyden mittlern Glieder verwechselt werden, ohne die Gleichheit der Verhältnisse aufzuheben.

§. 73.

Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden mittlern Glieder so groß, als die Summe der beyden äußern.

Beweis.

Jede arithmetische Proportion läßt sich so konstruiren:

$$a - (a + d) = c - (c + d)$$
oder $(a + d) - a = (c + d) - c.$

In beyden Fällen ist $a + (c + d) = (a + d) + c.$
Wenn $f + n = g + m$; so ist $f - g = m - n.$

§. 74.

Wenn : : : $a - b = c - g$
so ist $a + g = b + c.$ §. 73.
also $g = b + c - a$
und $a = b + c - g$
und $b = a + g - c$
und endlich $c = a + g - b$

Man kann also aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion, immer das fehlende Glied finden, und zwar, wenn ein äusseres Glied fehlt, so findet sich solches, wenn man von der Summe der

bey=

beyden mittlern Glieder das bekannte äussere abzieht

Fehlt ein mittleres Glied, so wird solches gefunden, wenn man von der Summe der beyden äussern Glieder das bekannte mittlere abzieht.

Exempel.

Es sind die Zahlen 9, 3, 11. in der Ordnung, wie sie hier auf einander folgen, das 1ste, 2te und 3te Glied einer arithmetischen Proportion, wenn man das 4te Glied finden soll. Nach obiger ersten Regel ist die Rechnung selbst folgende:

3	2tes Glied
11	3tes Glied
14	Summa der beyden mittlern Glieder.
9	erstes oder äußeres Glied.
bleibt 5	viertes Glied.

demnach ist $9 - 3 = 11 - 5$.

Wären in dieser Proportion 9, 11 und 6 gegeben, und man sollte also das fehlende mittlere Glied finden, so ist $9 + 5 - 11 = 3$ das gesuchte Glied.

§. 75.

Zusatz.

Da bey den 3 gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das eine Verhältniß immer vollständig gegeben ist, so ist es meistens bequemer, daraus die Differenz zu suchen, und aus ihr und dem einen gegebenen Gliede des andern Verhältnisses, das folgende Glied zu finden.

Die Rechnung wäre hiernach bey dem ersten Exempel des vorigen §. $11 - (9 - 3) = 11 - 6 = 5$;
bey dem 2ten Exempel $9 - (11 - 5) = 9 - 6 = 3$

es ist nämlich offenbar $g = c - (a - b)$
$a = b + (c - g)$
$b = a - (c - g)$
und $c = g + (a - b)$

Die in den Klammern stehenden Größen geben immer die Differenz, und man muß nur noch bemerken: daß, wenn das 1ste oder 3te Glied gesucht wird, die Differenz addirt, wann aber das 2te oder 4te Glied gesucht wird, die Differenz abgezogen wird.

§ 76.

Wenn die mittlern Glieder in einer arithmetischen oder auch geometrischen Proportion gleich sind, so heißt sie stetig (continua). Der allgemeine Ausdruck einer stetigen arithmetischen Proportion ist folgender:

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d).$$

Es ist nämlich in der allgemeinen Form $c = a + d$ gesetzt worden.

§. 77.

Eine stetige Proportion hat also nur drey verschiedene Glieder, und das zweyte, welches hier das mittlere heißt, kommt eigentlich zweymal vor. Ist also $a - b = b - g$, so wird $a + g = 2b$, das heißt: die Summe der äußern Glieder ist hier doppelt so groß, als das mittlere (§. 73.); da $a + g = 2b$, so ist $b = \frac{1}{2}(a + g)$ das heißt: das mittlere Glied ist bey einer stetigen arithmetischen Proporrion gleich der halben Summe der äußeren Glieder; ferner ist hier $a = 2b - g$, und $g = 2b - a$, ein äußeres Glied wird also hier gefunden, wenn man das bekannte äußere von dem doppelten mittleren Gliede abzieht.

§. 78.

§. 78.

Es ist hier $d = \frac{1}{2}(g - a)$

Beweis. Es ist $a - b = d$
ferner $b - g = d$
folglich $a - g = 2d$
mithin $\frac{1}{2}(a - g) = d$

Nun ist $b = a + d$; folglich findet man auch $b = a + \frac{1}{2}(a - g)$, oder da b auch $= g - d$, so ist $b = g - \frac{1}{2}(a - g)$.

§. 79.

Anmerk. Zwischen zwey Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl finden, heißt nichts anders, als das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion finden. Man pflegt eine mittlere arithmetische Proportionalzahl zu suchen, wenn man wissen will, wieviel zwey Größen, eine in die andere gerechnet, betragen. Z. B. Es hat jemand im letzten Jahre 3754 Rthlr. gewonnen, und im vorletzten Jahre 4106 Rthlr., so findet sich der mittlere Gewinn für beyde Jahre $= \frac{3754 + 4106}{2} =$

$\frac{7860}{2} = 3930$ Rthlr. Im gemeinen Leben bedient man sich bey Finanzrechnungen u. dgl. eines Verfahrens, welches mit der Art, das arithmetische Mittel zu finden, Aehnlichkeit hat. So wird z. B. der Ertrag eines Gutes dadurch bestimmt, daß man den Durchschnitt (die Faktion) macht. Man nimmt nämlich von 3, 6 oder mehr Jahren den jährlichen Ertrag, addirt sie und dividirt die Summe durch die Anzahl der Jahre.

Es sey der Ertrag im ersten Jahre gewesen 1800 Rthlr.
im zweyten = = 1600 —
im dritten = = 1900 —
im vierten = = 1700 —
Summa 7000

In diese Summe mit die Zahl der Jahre dividirt, giebt = = = 1750 Rthlr.

Eben so verfährt man bey folgendem Exempel. In einer Stadt sind in 10 auf einander folgenden Jahren geboren:

Im ersten Jahre 1817.
— zweyten = = 1949.
— dritten = = 2103.
— vierten = = 2422.
— fünften = = 1897.
— sechsten = = 1755.
— siebenten = 2214.
— achten = = 2145.
— neunten = = 1999.
— zehnten = = 2003.
Summa 20304.
10

2030, 4 mittlere Anzahl der jährlich Gebornen.

Die Bestimmung einer solchen Mittelzahl geschieht mit Weglassung ungewöhnlicher und außerordentlicher Fälle.

§. 80.

Anmerk. Die Art, wie wir die Proportionen schreiben, ist überall gebräuchlich. Die Ausländer schreiben die arithmetische Proportion so: 20.15 .˙. 35.30, und die geometrische Proportion so: 20.15 :: 8.6.

Unsere Art, die arithmetischen Proportionen anzuzeigen, gründet sich auf ihre Erklärung, und ist von dem

dem Freyherrn von Wolf zuerst gebraucht worden. Das natürliche Zeichen für die geometrische Proportion, welches die Erklärung selbst ausdrückt, so wie wir es eben angezeigt haben, wurde vom Freyherrn von Leibnitz zuerst gebraucht.

§. 81.

Von den geometrischen Proportionen.

Die allgemeinste Konstruktion einer geometrischen Proportion, (oder wie wir künftig der Kürze wegen nur immer Proportion schreiben werden, wenn wir eine geometrische Proportion anzeigen wollen, und nur bey der arithmetischen Proportion wollen wir immer das Prädikat **arithmetisch** vorsetzen), ist:

$$a : ae = b : be$$

und daher offenbar $a \,.\, be = ae \,.\, b$

das heißt: das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem Produkte der mittlern Glieder, einen Satz, den wir bereits auf eine andere Art im ersten Theile dieses Werks, Seite LIX. §. 64., erwiesen haben.

Wenn also $a:b=c:d$, so ist $a.d=b.c$.

Hieraus fließt:

$$a = \frac{b.c.}{d};\quad d = \frac{b.d.}{a};\quad b = \frac{a.d.}{c};\quad c = \frac{a.d.}{b}$$

und darnach läßt sich aus jeden drey Gliedern einer Proportion das vierte finden. Man findet nämlich ein äußeres Glied, wenn man das Produkt der mittlern Glieder durch das bekannte äußere Glied dividirt. Ein mittleres Glied wird gefunden, wenn man das Produkt der äußern Glieder durch das bekannte mittlere Glied dividirt.

Man

Man kann indeß auch oft aus den Gliedern des vollständig gegebenen Verhältnisses leicht den Exponenten finden, und dann ist es vortheilhafter, diesen Exponenten zu suchen, aus ihm und dem gegebenen Gliede des andern Verhältnisses das fehlende Glied zu finden. Es finden hier auch manche Vortheile statt, die aber nicht hieher, sondern in eine praktische Anweisung zur **Regeldetri** gehören.

Wenn die beyden mittlern Glieder einer geometrischen Proportion gleich groß sind: so heißt sie eine **stetige Proportion.**

Der allgemeine Ausdruck war:

$$a : ae = b : be$$

setzt man hier $b = ae$, so erhält man für die stetige Proportion:

$$a : ae = ae : ae^2.$$

Ist nun $a : b = b : c$, so wird $a \cdot c = b^2$, oder das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem Quadrat des mittelsten Gliedes. Hieraus folgt $a = \frac{b^2}{c}$; $c = \frac{b^2}{a}$, man kann daher die äußern Glieder finden. Wie man aber das mittlere Glied hier findet, kann noch nicht gewiesen werden, da wir noch nichts von Ausziehung der Quadratwurzel gehabt haben.

§. 82.

Vorausgesetzt, daß a, b, c und d gleichartige Größen sind, so ist, wenn $a : b = c : d$

auch $b : a = d : c$.

In Worten: In jeder Proportion kann man die Glieder in beyden Verhältnissen verwechseln, und die verwechselten Glieder werden eben so eine Proportion machen.

Beweis.

Beweis.

Denn, ist der Verhältnißname oder der Exponent $a : b = c : d$ gleich e, so haben die Verhältnisse $b : a$ und $d : c$ beyde den Exponenten $\frac{1}{e}$ (§. 58.) welches sich auch ganz augenscheinlich zeigt, wenn man die allgemeinen Konstruktionen nimmt $a : ae = b : be$

also auch $ae : a = be : b$

§. 83.

Wenn man die mittlern Glieder einer Proportion miteinander verwechselt, so machen die verwechselten Glieder mit der ungeänderten in der Ordnung, wie sie stehen, wiederum eine Proportion.

Das heißt, wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$a : c = b : d$.

Beweis.

Denn, gebraucht man die Konstruktion $a : ae = b : be$, so ist offenbar, daß auch noch $a : b = ae : be$ ist. Der Beweis kann auch so geführt werden.

Da $a : b = c : d$ nach der Voraussetzung, so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und daher auch $\frac{a}{bc} = \frac{1}{d}$, ferner $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, folglich $a : c = b : d$.

§. 84.

Wenn zwey Produkte gleich groß sind, und ein jedes aus zwey Faktoren besteht: so sind die beyden Faktoren des einen Produkts zwi-

zwischen den beyden Faktoren des andern, mittlere geometrische Proportionalzahlen.
Das heißt: wenn $ad = bc$, so ist $a : b = c : d$.

Beweis.

Da $ad = bc$, so ist auch $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und daher allerdings $a : b = c : d$.

§. 85.

Wenn F, f, zwey Faktoren und ihr Produkt gleich P, so ist $F . f = 1 . P$ und daher $1 : f = F : P$, das heißt: **Die Einheit ist so oft in dem einen Faktor enthalten, als der andere Faktor im Produkte enthalten ist.** Daher zwey Zahlen mit einander multiplizieren, nichts anders heißt, als: **Zur Einheit und den beyden gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl finden.**

§. 86.

Ist D der **Dividendus**, d der **Divisor** und Q der **Quotient** von beyden, so ist $\frac{D}{d} = \frac{Q}{1}$, also $1 . D = d . Q$, mithin $d : D = 1 : Q$, das will sagen: **Der Divisor ist in dem Dividendus so oft enthalten, als die Einheit im Quotienten.** Daher sagt man, zwey Zahlen durch einander dividiren, heiße: **zum Divisor, Dividendus und der Einheit, die vierte geometrische Proportionalzahl finden.**

Anmerk. §. 85. und 86. enthalten demnach die allgemeinen Esklärungen der Multiplikation und Division, die auch Brüche und Irrationalzahlen unter sich begreifen.

§. 87.

§. 87.

Wenn $a : b = c : d$

so ist auch $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$

und $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$

Beweis.

Die zweyte Proportion ist richtig, weil das Verhältniß $a : b = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist. (§. 60.). Aus der ersten folgt $a : c = b : d$, also auch $\frac{a}{n} : \frac{c}{n} = b : d$ und folglich $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$ (§. 83.).

Anmerk. Diese Divisionen der gleichnamigen Glieder kürzen die wirklichen Rechnungen in der Regeldetri, wenn sie gut angebracht werden, sehr ab.

§. 88.

Zwey Brüche, die gleiche Nenner haben, verhalten sich wie ihre Zähler.

Denn $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a : c.$ (§. 60.)

Zwey Brüche von gleichem Zähler verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner.

Denn $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{c}{b} : 1 = c : b.$

Zwey Brüche von ungleichem Zähler und Nenner verhalten sich, wie die Produkte aus des einem Zähler in des andern Bruchs Nenner.

Denn $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{b} : c = ad : bc.$

§. 89.

§. 89.

Wenn zwey Verhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich die Summen oder Unterschiede der Glieder eines jeden Verhältnisses, wie die gleichnamigen Glieder beyder Verhältnisse.

Es sey $a : b = c : d$, so soll auch seyn $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$ oder wie $b : d$.

Beweis.

In der allgemeinen Konstruktion der Proportion ist $b = ae$ und $d = ce$. Daher $(a \pm b) : (c \pm d) = (a \pm ae) : (c \pm ce) = a(1 \pm e) : c(1 \pm e) = a.c.$

§. 90.

Da $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$, so ist auch

$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$ } §. 83.
und $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$ }

und daher auch $a : (a \pm b) = c : (c \pm d)$ } §. 82.
$b : (a \pm b) = d : (c \pm d)$ }

§. 91.

Wenn zwey Verhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich die Summen der Glieder jedes Verhältnisses eben so, wie ihre Unterschiede.

Wenn nämlich $a : b = c : d$, so wird auch $(a \pm b) : (c \pm d) = (a - b) : (c - d)$.

Beweis.

Dieser folgt unmittelbar aus §. 90.; denn nach dem dortigen Satze ist $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$

und $(a - b) : (c - d) = a : c$

folglich auch $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$.

§. 92.

§. 92.

Zusatz.

Da $(a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$
so ist auch $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$. §. 83.
und daher auch $(a-b):(a+b)=(c-d):(c+d)$. §. 82.

§. 93.

Wenn mehrere Verhältnisse, die aus Gliedern von eben der Art bestehen, einander gleich sind, so stehen die Summen oder Unterschiede gleichnamiger Glieder dieser Verhältnisse in einem Verhältnisse, das jedem der gegebenen gleichen Verhältnisse gleich ist.

Das heißt: Wenn $a:b=c:d=e:f=g:h=i:k$ u. s. w.
so ist allemal $(a+c+e+g+i):(b+d+f+h+k.)=a:b=(a-c+e-g+i):(b-d+f-h+k)$.

Beweis.

Es ist offenbar $a:b=a:b$
und $c:d=a:b$

folglich $(a\pm c):(b\pm d)=a:b$. §. 68.
nun ist auch $e:f=a:b$.

so ist wiederum auch $(a\pm c\pm e)=(b\pm d\pm f)=a:b$
und da $g:h=a:b$

so hat man wieder $(a\pm c\pm e\pm g):(b\pm d\pm f\pm h)=a:b$
endlich da auch $i:k=a:b$

so ist aus obigen Gründen auch
$(a\pm c\pm e\pm g\pm i):(b\pm d\pm f\pm h\pm k)=a:b$
und so würde sich der Beweis für mehrere Glieder leicht fortsetzen lassen.

§. 94.

§ 94.

Wenn vier Größen in Proportion stehen, so machen die zweyten, dritten, vierten, und überhaupt die nten Potenzen dieser Größen, in eben der Ordnung eine Proportion.

Z. B. Wenn $a : b = c : d$
so ist auch $a^n : b^n = c^n : d^n$.

Beweis.

Es ist $a : b = c : d$
und $a : b = c : d$
folglich $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$. §. 69.
ferner $a : b = c : d$
mithin auch $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$. §. 69.
ferner $a : b = c : d$
endlich wieder $a^4 : b^4 = c^4 : d^4$.

folglich allgemein:

$a^n : b^n = c^n : d^n$.

§. 95.

Wenn $a : b = c : d$ und
$f : g = h : k$ ist, so ist auch
$af : bg = ch : dk$.

Beweis.

Der Exponent des Verhältnisses $a : b$ sey $= e$ und des Verhältnisses $f : g = n$, so ist $af : bg = ne$ (§. 66.), aber eben diesen Exponenten hat $ch : dk$, folglich ist $af : bg = ch : dk$.

§. 96.

§. 96.

Wenn a : b = c : d, und
f : g = h : k ist, so ist auch

$$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}$$

Beweis.

Aus dem vorigen §. erhellet, daß a : b = e, und f : g = n daher $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{e}{n}$, (§. 67.) $= \frac{c}{h} : \frac{d}{k}$.

§. 97.

Wenn a : b = c : d, und
b : g = d : k ist, so ist auch
ab : bg = cd : dk. §. 95.
folglich a : g = c : k

und wenn a : b = c : d und
f : a = h : c ist, so ist auch
af : ab = ch : cd
folglich f : b = h : d.

dieß nannten die Alten ordinatim ex aequo schließen.

§. 98.

Ist a : b = c : d und
a : g = h : d, so ist auch
g : b = c : h

und

Ist a : b = c : d und
f : b = c : k, so ist auch
a : f = k : d

dieß nannten die Alten perturbate et ex aequo schließen.

ßen. Der Beweis ist leicht, wenn man nur die Glieder in der zweyten Proportion des ersten und zweyten Satzes verwechselt.

Von der Regel-Detri und ihrer Anwendung.

§. 99.

Die Regel des 81. §., nach welcher man zu drey Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl sucht, heißt die **Regel-Detri**, eigentlich: regula de tribus sc. numeris. Sie heißt auch die güldene Regel (regula aurea), wegen ihres überaus großen und allgemeinen Nutzens, sowohl in der ganzen Mathematik, als auch bey solchen Rechnungsfragen, die im bürgerlichen Leben, beym Handel und allerhand Arten der Handthierung und Gewerbe vorkommen. Die Anwendung dieser Regel auf die Rechnungsfragen der letzten Art wird gewöhnlich in den sogenannten Rechenbüchern sehr weitläuftig gezeigt, und die Sache selbst durch mancherley Arten Exempel erklärt. Der Vortrag ist in den meisten Rechenbüchern hierüber so schlecht, und wegen der großen Menge specieller Regeln, die nur in einzelnen Fällen brauchbar sind, so schwer und unangenehm, daß diejenigen, die so unglücklich sind, einen solchen Unterricht zu genieſſen, mehrere Jahre nöthig haben, ehe sie einigermaaßen im Rechnen geübt werden.

Indessen wäre es freilich eben nicht der beste Weg, wenn man allen jungen Leuten, die zur Handlung, zu Künsten, oder Handwerken vorbereitet werden sollen, die Rechenkunst nach mathematischer Lehrart vortragen wollte. Man würde dadurch bey einem großen Theil derselben seinen Zweck verfehlen, weil sie kaum aufgelegt sind, nach der Erwartung ähnlicher Fälle zu schlie-

ßen,

ßen, geschweige eine lange Reihe aneinander hängender allgemeiner Wahrheiten zu überdenken. Für solche junge Leute muß demnach wohl ein anderer Weg eingeschlagen und ihnen manches freilich bloß empyrisch gelehrt werden. Aber Gelehrte und überhaupt solche Personen, die ihre Seelenkräfte mehr, als der gemeine Haufen brauchen, können auf einem weit leichtern Wege zu eben dem Ziele gelangen.

§. 100.

Die Regeldetri läßt sich allemal anwenden, wenn man weiß, daß ein Paar Größen von einer gewissen Art sich eben so wie ein Paar Größen verhalten, die zu eben derselben, oder auch zu einer andern Art gehören; drey von diesen Größen müssen alsdann gegeben seyn, wenn die vierte gesucht wird. Man muß daher zuförderst wissen, ob zwey Größen, wovon in der Aufgabe die Rede ist, sich wirklich so gegen einander verhalten, wie die dritte zur gesuchten Größe, bevor man die Regeln anwenden kann. Ehe man aber im Stande ist, irgend eine hieher gehörige Rechnungsaufgabe aufzulösen, muß man vorher die Verhältnisse und Proportionen derjenigen Sachen gegen einander kennen, womit man bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens zu thun hat. Gesetze oder eingeführte Gewohnheiten haben bereits solche bestimmt, und man lernt sie zum Theil von Jugend auf, so zu sagen, von selbst kennen; theils durch Erfahrung, theils durch Nachdenken und Beobachtung. Münzen, Maaße, Gewichte haben in verschiedenen Ländern oft einerley Namen, aber nicht einerley Größe. Eben so verhält es sich auch mit andern Dingen, die nicht an sich bestimmt sind, sondern von Gesetzen, Verträgen und andern Umständen abhängig sind, und durch diese einen bleibenden, oft aber auch einen veränderlichen Werth erhalten. Auf

die Gegenstände des Handels haben oft auf sehr entfernte Ursachen einen bedeutenden Einfluß. Ueber solche Einrichtungen kann man sich nur auf dem Wege der Erfahrung belehren.

§. 101.

Die vornehmsten zur Regeldetri gehörigen Fälle, welche bey den im gemeinen Leben üblichen Rechnungsfragen am meisten vorkommen, sollen nun nach einander auf gewisse Grundregeln gebracht, und jede derselben mit einigen dahin gehörigen Exempeln erläutert werden. Hieher gehören alle die Fälle, da man eine genannte Zahl auf einen andern Namen bringen soll: Z. E. Wie viel Thaler machen 517 Groschen? und umgekehrt. Fälle von dieser Art werden zwar meistens aufgelöst, ohne die Sache eben so allgemein als hier zu betrachten; allein das schadet nichts, sie gehören zu allgemeinen Aufgaben. Wenn also überhaupt eine gewisse Menge von Einheiten der einen Benennung so viel ausmacht, als eine andere Menge von Einheiten von anderer Benennung: so sieht man leicht, daß die doppelte Anzahl der ersten Art so viel ausmache, als die doppelte Anzahl der andern, und die dreyfache Anzahl der ersten so viel, als die dreyfache Anzahl der andern u. s. f. Wenn drey Mariengroschen 2 gute Groschen werth sind, so sind 2mal 3 Mariengroschen auch 2mal 2 gute Groschen werth. Will man also wissen, wie viel 296 Mariengroschen werth sind: so kann man ansetzen 3 Mgr. : 296 Mgr. = 2 Ggr. zum Werth von 296 Mgr. in gute Groschen ausgedrückt, also die gesuchte:

$$= \frac{296 \text{ Mgr. } 2 \text{ Ggr.}}{3. \text{ Mgr.}} = \frac{296. 1 \text{ Mgr. } 2 \text{ Ggr.}}{3. 1. \text{ Mgr.}}$$

$$= \frac{296. 2. \text{ Ggr.}}{3.} = \frac{592. \text{ Ggr.}}{3.} = 197\tfrac{1}{3}. \text{ Ggr.}$$

Noch

Noch ein Exempel. Wenn 14400 Rheinl. Fuß so viel machen, als 13913. Pariser Fuß, wie viel Rheinl. Fuß machen 328 Pariser Fuß?

Man setzt an

13913 P. F. : 328 P. F. = 14400 R. F. : gesuchten Zahl, welche wir x nennen wollen, also:

$$x = \frac{328 \text{ P. F. } 14400 \text{ R. F.}}{13913 \text{ P. F.}} = \frac{328 \text{ P. F. } 14400 \text{ R. F.}}{13913 \text{ 1 P. F.}}$$

$$= \frac{328.\ 14400 \text{ R. F.}}{13913.} = 339,\ 48 \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Drittes Exempel. An dem südlichen Rande des Mondes giebt es Berge, deren Höhe der O. A. Schröter auf 25000 Par. Fuß setzt, wie viel beträgt diese Höhe in Rheinl. Fuß? **Antwort:** 25875 Rheinl. Fuß.

Dieß ist der Grund aller Reduktionen der mancherley Maaße, Gewichte und Münzen auf andre, wenn man weiß, wie viel von der einen Art eine gewisse Menge der andern ausmacht.

§. 102.

Zwey von den drey gegebenen Zahlen müssen einerley Namen haben, oder doch auf einerley Namen gebracht werden können. Die dritte von den gegebenen Zahlen muß mit der gesuchten von einerley Art seyn. (§. 63.). Die Rechenmeister nennen eine von den beyden ersten Zahlen die **Fragzahl** des Exempels, weil eine von den beyden ersten Zahlen gewöhnlich mit der gesuchten Zahl vermittelst der Frage: **wie viel?** oder eines ähnlichen Fragwortes verbunden ist. Bey unsern im vorigen §. gelehrten Ansatz, kömmt also die Fragzahl in die Mitte, was mit ihr von einerley Art ist, voran, was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die dritte Stelle, und dieser Ansatz ist ganz der Natur der Proportion gemäß. Allein die Rechenmei-

ster schreiben das Exempel so nieder, wie es beym gewöhnlichen Ausdruck lautet: alsdann kommt die Fragzahl in die dritte Stelle, was mit ihr von einerley Art ist, voran, und was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die Mitte. Hiernach geordnet, müßte das zweyte Exempel des vorigen §. so stehen:

13913 P. F. : 14400 R. F. = 328 P. F. : x R. F.

Auch hier gilt die Regel: Man dividire das Produkt der beyden letzten Zahlen mit der ersten. Man erhält auf diese Art das nämliche Resultat, weil man eigentlich die oben stehenden Zahlen nur als Zahlen betrachtet, die eine Proportion ausmachen, und nicht darauf Rücksicht nimmt, daß sie sich auf verschiedene Einheiten beziehen, so ist also die Verwechselung der beyden mittleren Glieder erlaubt (§. 83.). Nur muß man bemerken, daß die gesuchte Zahl nur allemal mit derjenigen Zahl unter einerley Namen gefunden werde, welche ihre Stelle in der Mitte erhält.

Wir wollen dieses durch noch ein Beyspiel erläutern. Gesetzt, 7 ℔. kosten 12 Rthlr., was kosten 35 ℔.

Der Rechenmeister setzt also an:

7 ℔. : 12 Rthlr. = 35 ℔. : x Rthlr.

und findet $x = \frac{12 \text{ Rthlr.} \cdot 35 \text{ ℔.}}{7 \text{ ℔.}} = 60 \text{ Rthlr.}$

Allein dieser Ansatz taugt nichts, weil 7 ℔. ∴ 12 Rthlr. kein Verhältniß geben kann, da offenbar weder Pfunde in Thalern, noch Thaler in Pfunden enthalten seyn können.

Der Mathematiker würde es besser so ordnen:

7 ℔. : 35 ℔. = 12 Rthlr. : x Rthlr.

folglich $x = \frac{35 \text{ ℔.} \cdot 12 \text{ Rthlr.}}{7 \text{ ℔.}} = 60 \text{ Rthr.}$

Diese mathematische Ordnung der Glieder hat den Vortheil

theil, daß sie uns gleich darauf führt, die Proportion bey den Zahlen aufzusuchen, wo wir die Regeldetri anbringen wollen, und sie also weder da anzubringen, wo sie nicht hingehört, noch auch, wo sie hingehört, sie falsch anzubringen.

§. 103.

Wer nach der Regeldetri berechnen wollte, wie tief ein Körper in 7 Sekunden gefallen sey, wenn er in einer Sekunde $15\frac{5}{8}$ rheinl. Fuß fällt, der würde eine falsche Anwendung dieser Regel machen, denn aus der Physik ist bekannt, daß der Fallkörper nicht in demselben Verhältniß wächst, als die Zeit.

§. 104.

In §. 101. habe ich in dem ersten Exempel 296 Mgr. so ausgedrückt: 296. 1 Mgr. Durch diese Vorstellung sieht man deutlich, daß sich die Benennung Mgr., so wie im zweyten Exempel die Benennung P. F., aufhebt; daher bleibt im ersten Exempel weiter keine benannte Zahl, als Sgr., und in dem zweyten, R. F. Auf diese Art weiß man also ganz bestimmt, von welcher Art das Resultat seyn muß, und für Anfänger ist diese Vorstellung die beste.

§. 105.

Die Regeldetri wird gebraucht beym Kauf und Verkauf; denn hier verhält sich die Menge von einerley Waare, die man nach Maaß und Gewicht bestimmt, wie der dafür zu zahlende Preiß. Weiß man demnach, wie viel eine gewisse Menge dieser Waare kostet, so läßt sich für jede andre Menge der Preiß, und für jeden andern gegebenen Preiß die zugehörige Menge der Waare berechnen.

Wenn

Wenn ein Centner einer gewissen Waare 137 Rthlr. kostet, wie viel kosten 5 Liespfund?

Hier muß man nun wissen, daß ein Liespfund 14 Pfund beträgt. Daher 5 Liespfund = 5. 14 lb., der Centner aber 110 Pfund enthält. Der Ansatz ist nun folgender:

110 lb. : 5. 14 lb. = 137 Rthlr. : x Rthlr.

folglich $x = \frac{5.\ 14.\ 137}{110}$ Rthlr.

Umgekehrt, wenn ein Centner Waare 137 Rthlr. kostet, wie viel erhält man von eben der Waare für 100 Rthlr? Antwort:

137 Rthlr. – 100 Rthlr. = 110 Pf. : x Pf.

also $x = \frac{100.\ 100}{137}$ Pf.

Die Rechenmeister unterscheiden gerade Regeldetri von verkehrter Regeldetri, und rechnen zu der letztern alle Aufgaben, worin auf die Frage: je mehr die Antwort, je weniger, und auf die Frage: je weniger die Antwort, je mehr gegeben werden muß. Z. B. Je mehr Arbeiter bey Anfertigung eines Werkes beschäftigt werden, desto kürzer ist die Zeit. Je schmaler ein Tuch ist, desto mehr, je breiter aber, desto weniger braucht man von selbigem zu einem und demselben Zwecke. Der Mathematiker braucht diese Unterscheidung nicht, indem er die Proportion der Natur der Aufgabe gemäß aufsetzt.

§ 106.

Ich will hier in einigen Beyspielen noch zeigen, wie man sich allerley brauchbarer Vortheile zur Abkürzung der Rechnung bedienen kann.

1 lb. kostet 3 gr., wie viel kosten 753 lb.?

Der Ansatz stehet nach oben gegebener Regel so:

1 lb.

1 Pfd. : 753 Pfd. = 3 ggr. : x.

Da nun 3 gr. in unserm Gelde $\frac{1}{8}$ rthlr. betragen, so finde ich hier x, indem ich 753 mit $\frac{1}{8}$ multiplizire, also $x = \frac{753}{8} = 94$ rthlr. 3 gr.

Wenn das Pfd. 2, 4, 6, 8 oder 12 gr. kosten würde, so findet derselbe Vortheil statt, weil der Thaler, zu 24 gr. gerechnet,

2 gr. = $\frac{1}{12}$ rthlr.; 4 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr.; 6 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr.
8 gr. = $\frac{1}{3}$ und 12 = $\frac{1}{2}$ rthlr. beträgt.

Eben so finde ich auch, daß:

5 gr. = $\frac{5}{24}$ rthlr. = $\frac{4}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{24}$ rthlr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$ rthlr.; oder auch = 6 gr. – 1 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. – $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$ rthlr.; oder auch = 8 gr. – 3 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. – $\frac{1}{8}$ rthlr.

7 gr. = $\frac{7}{24}$ rthlr. = $\frac{6}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{24}$ = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$ oder auch 7 gr. = 3 gr. + 4 gr. = $\frac{1}{8}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr. oder auch = 8 gr. – 1 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. – $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$ rthlr.

9 gr. = $\frac{9}{24}$ rthlr. = $\frac{3}{8}$ rthlr.; oder auch = 6 gr. + 3 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ rthlr.; oder auch = 8 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$ rthlr. oder auch = 12 gr. – 3 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. – $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ rthlr.

10 gr. = $\frac{10}{24}$ rthlr. = $\frac{5}{12}$ = gr. 4 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. = 8 gr. + 2 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$; oder auch = 12 gr. – 2 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. – $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ rthlr.

11 gr. = 10 gr. + 1 gr. $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}$ rthlr.; oder auch = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$ rthlr. oder auch = 6 gr. + 3 gr. + 2 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, oder auch =

12 gr. – 1 gr = $\frac{1}{2}$ rthlr. – $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr.; oder auch
= 8 gr. + 3 gr. = = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr.

13 gr. = 12 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr.,
oder auch = 8 gr. + 4 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr.
+ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$ rthlr.; oder = $\frac{3}{4}$ rthlr. +
$\frac{1}{12}$ rthlr.; oder = 16 gr. – 3 gr. = $\frac{2}{3}$ rthlr. –
$\frac{1}{8}$ rthlr.

14 gr. = 12 gr. + 2 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr + $\frac{1}{2}\frac{1}{6}$ rthlr.;
oder = = 8 gr. + 6 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr.
= $1\frac{7}{12}$ rthlr.

15 gr. = $\frac{15}{24}$ rthlr. = $\frac{5}{8}$ rthlr. = $\frac{4}{8}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr.
= $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ rthlr.

16 gr. = $\frac{16}{24}$ rthlr. = $\frac{2}{3}$ rthlr = $\frac{3}{3}$ rthlr. – $\frac{1}{3}$ rthlr. =
1 rthlr. – $\frac{1}{3}$ rthlr.; oder = 12 gr. + 4 gr. =
$\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ rthlr.

17 gr. = 12 gr. + 4 gr + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ rthlr.
+ $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$ rthlr.; oder auch = 16 gr. + 1 gr. = $\frac{2}{3}$
rthlr + $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}$ rthlr.

18 gr. = $\frac{18}{24}$ rthlr. = $\frac{3}{4}$ rthlr. = $\frac{4}{4}$ rthlr. – $\frac{1}{4}$ rthlr. =
1 rthlr. – $\frac{1}{4}$ rthlr; oder = 12 gr. + 6 gr. =
$\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ rthlr.

19 gr. = 12 gr. + 6 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
rthlr. + $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$ rthlr.; oder = 18 gr. + 1 gr. =
$\frac{3}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$ rthlr.; oder = 20 gr. – 1 gr. =
$\frac{5}{6}$ rthlr. $\frac{1}{12}$ rthlr.

20 gr. = $\frac{20}{24}$ rthlr. = $\frac{5}{6}$ rthlr = $\frac{6}{6}$ rthlr. – $\frac{1}{6}$ rthlr. =
1 rthlr. – $\frac{1}{6}$ rthlr.; oder = $\frac{3}{6}$ rthlr. + $\frac{2}{6}$ rthlr. =
$\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr.

21 gr. = $\frac{2}{24}$ rthlr. = $\frac{7}{8}$ rthlr. = $\frac{8}{8}$ rthlr. – $\frac{1}{8}$ rthlr. =
1 rthlr. – $\frac{1}{8}$ rthlr.; oder = $\frac{4}{8}$ rthlr. + $\frac{2}{8}$ rthlr. +
$\frac{1}{8}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ rthlr.;
oder = 12 gr. + 8 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. +
$\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}$ rthlr.

22 gr. = 1 rthlr. – 2 gr. = 1 rthlr. – $\frac{1}{12}$ rthlr.; oder
= 20 gr. + 2 gr. = $\frac{5}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$ rthlr. =
$\frac{3}{6}$ rthlr. + $\frac{2}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. +
$\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ rthlr.

23 gr. = 1 rthlr. – 1 gr = 1 rthlr. – $\frac{1}{24}$ rthlr.; oder
= 20 gr. + 3 gr. = = $\frac{5}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr. =
$\frac{3}{6}$ rthlr. + $\frac{2}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr. = = $\frac{1}{2}$ rthlr. +
$\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ rthlr.

§. 107.

Pfennige, deren 12 auf einen Groschen gehen, geben folgende Reduktionen zu höhern Einheiten.

1 pf. = $\frac{1}{12}$ gr. = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr. = $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$ rthlr.
2 pf. = $\frac{1}{6}$ gr. = $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr.
3 pf. = $\frac{1}{4}$ rthlr. = $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr.
4 pf. = $\frac{1}{3}$ gr. = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr. = $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}$.
5 pf. = $\frac{5}{12}$ gr. = $\frac{4}{12}$ gr. + $\frac{1}{12}$ gr. = $\frac{1}{3}$ gr. +
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ gr.; oder = $\frac{3}{12}$ gr. + $\frac{2}{12}$ gr. = $\frac{1}{4}$ gr. +
$\frac{1}{6}$ gr.; = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr. + $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr.; oder =
$\frac{1}{2}$ gr. – $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$ gr. = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}$ rthlr. – $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}$ rthr.
6 pf. = $\frac{1}{2}$ gr. = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}$ rthlr.
7 pf. = 6 pf. + 1 pf. = $\frac{1}{2}$ gr. + $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$ gr. = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}$ rthlr.
+ $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}$ rthlr.; oder = 3 pf. + 4 pf. = $\frac{1}{4}$ gr.
+ $\frac{1}{3}$ gr. = $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr. + $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}$ rthlr. = $\frac{1}{12}$
$(\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$ rthlr.

8 pf.

8 pf. = $\frac{2}{3}$ gr. = 1 gr. − $\frac{1}{3}$ gr. = $\frac{1}{6.6}$ rthlr. = =
$\frac{1}{4.9}$ rthlr = $\frac{3}{3.12}$ rthlr.

9 pf. = $\frac{3}{4}$ gr. = 1 gr. − $\frac{1}{4}$ gr. = $\frac{1}{4.8}$ rthlr.

10 pf. = $\frac{5}{6}$ gr. = $\frac{3}{6}$ gr. + $\frac{2}{6}$ gr. = $\frac{1}{2}$ gr. + $\frac{1}{3}$ gr.
= $\frac{1}{4.12}$ rthlr. + $\frac{1}{6.12}$ rthlr. = $\frac{1}{12}$($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{6}$)rthlr.;
oder = 1 gr. − $\frac{5}{6}$ gr. = $\frac{1}{24}$ rthlr. − $\frac{1}{6.24}$ rthlr.

11 pf. = 10 pf. + 1 pf. = $\frac{5}{6}$ gr. + $\frac{1}{2.6}$ gr. =
= $\frac{1}{12}$ ($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{6}$) rthlr. + $\frac{1}{12.24}$ rthlr. = $\frac{1}{12}$
($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{4.6}$) rthlr. oder = 6 pf. + 3 pf.
+ 2 pf. = $\frac{1}{2}$ gr. + $\frac{1}{4}$ gr. + $\frac{1}{2.3}$ gr. = $\frac{1}{4}\frac{1}{12}$ rthlr.
+ $\frac{1}{8.12}$ rthlr. + $\frac{1}{12.12}$ rthlr. = $\frac{1}{12}$($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{2.4}$ +
$\frac{1}{3.4}$ rthlr. oder = 6 pf. + 4 pf. + 1 pf. = $\frac{1}{2}$ gr.
+ $\frac{1}{3}$ gr. + $\frac{1}{3.4}$ gr. oder = 1 gr. − $\frac{1}{12}$ gr. =
= ($\frac{1}{24}$ − $\frac{1}{12.24}$) rthlr. = $\frac{1}{24}$ (1 − $\frac{1}{12}$) rthlr.

§ 108.

Da diese Reduktionen der niedern Einheiten zu höhern für jeden äußerst wichtig sind, so will ich hier, Anfängern zum besten, noch folgende Reduktionen mittheilen, der Thaler zu 36 Mariengroschen à 8 pf.

1 gr. = $\frac{1}{3.12}$ rthlr. = $\frac{1}{4.9}$ rthlr. = $\frac{1}{6.6}$ rthlr.

2 gr. = $\frac{1}{2.9}$ rthlr. = $\frac{1}{3.6}$ rthlr.

3 gr. = $\frac{1}{3.4}$ rthlr. = $\frac{1}{2.6}$ rthlr.

4 gr. = $\frac{1}{9}$ rthlr.

5 gr = $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4.9}$ rthlr.

6 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr.

7 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{6.6}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{9}$ rthlr. +
$\frac{1}{12}$ rthlr.

8 gr. = $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{3.6}$ rthlr.; oder = $\frac{2}{9}$ rthlr.

9 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr.

10 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4 \cdot 9}$ rthlr.

11 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{2 \cdot 6}$ rthlr. + $\frac{1}{3 \cdot 6}$ rthlr.; oder
= $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4 \cdot 9}$ rthlr.

12 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr.

13 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr.

14 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3 \cdot 6}$ rthlr.; oder = $\frac{7}{18}$ rthlr.

15 gr. = $\frac{5}{12}$ = rthlr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3 \cdot 4}$ rthlr. =
$\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr.

16 gr. = $\frac{4}{9}$ rthlr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr.

17 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4 \cdot 9}$ rthlr. = $\frac{4}{9}$ rthlr.
+ $\frac{1}{4 \cdot 9}$ rthlr.

18 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr.

19 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2 \cdot 18}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{3}$ rthlr.
+ $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{6 \cdot 6}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthl.
+ $\frac{1}{3 \cdot 4}$ rthlr.

20 gr = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2 \cdot 9}$ rthlr. $\frac{5}{9}$ rthlr.

21 gr. = $\frac{7}{12}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. – + $\frac{1}{2 \cdot 6}$ rthlr. $\frac{1}{3}$ rthlr.
+ $\frac{1}{4}$ rthlr. = 1 rthlr. – $\frac{5}{12}$ rthlr.

22 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr.

23 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4 \cdot 9}$ rthlr.

24 gr. = $\frac{2}{3}$ rthlr. = 1 rthlr. – $\frac{1}{3}$ rthlr.

25 gr. = $\frac{2}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3 \cdot 12}$ rthlr. = $(2 + \frac{1}{12})$ $\frac{1}{3}$ rthlr.
= $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{6 \cdot 6}$ rthlr.

26 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{2}{3 \cdot 6}$ rthlr.

27. gr. = $\frac{3}{4}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2 \cdot 2}$ rthlr. = 1 rthlr.
– $\frac{1}{4}$ rthlr.

28 gr. = $\frac{7}{9}$ rthlr. $(1 - \frac{2}{9})$ rthlr. = $\frac{2}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthr.
= $(2 + \frac{1}{3})$ $\frac{1}{3}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr. +
$\frac{1}{4 \cdot 9}$ rthlr.

29 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.9}$ rthlr. = (7 + $\frac{1}{4}$) $\frac{1}{9}$ rthlr.

30 gr. = $\frac{5}{6}$ rthlr. = 1 rthlr. – $\frac{1}{6}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr.

31 gr. = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3.12}$) rthlr. = $\frac{5}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{6.6}$ rthlr.

32 gr. = $\frac{8}{9}$ rthlr. = 1 rthlr. – $\frac{1}{9}$ rthlr.

33 gr. = $\frac{11}{12}$ rthlr. = 1 rthlr. – $\frac{1}{12}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr.

34 gr. = $\frac{17}{18}$ rthlr. = 1 rthlr. – $\frac{1}{18}$ rthlr.

35 gr. = 1 rthlr. – $\frac{1}{2.18}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4.9}$ rthlr.

1 pf. = $\frac{1}{8}$ gr. = $\frac{1}{8.8.6}$ rthlr. = $\frac{1}{8.4.9}$ rthlr. = $\frac{1}{8.3.12}$ rthlr.

2 pf. = $\frac{1}{4}$ gr. = $\frac{1}{8.3.6}$ rthlr. = $\frac{1}{8.2.9}$ rthlr. = $\frac{1}{8.18}$ rthlr. = $\frac{1}{4.6.6}$ rthlr.

3 pf. = $\frac{3}{8}$ gr. = $\frac{1}{4}$ gr. + $\frac{1}{8}$ gr. = $\frac{1}{8.18}$ rthlr. + $\frac{1}{8.2.18}$ rthlr. = ($\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{16.2}$) $\frac{1}{9}$ rthlr.

4 pf. = $\frac{1}{2}$ gr. = $\frac{1}{2.4.9}$ rthlr. = $\frac{1}{2.6.6}$ rthlr. = $\frac{1}{8.9}$ rthlr.

5 pf. = $\frac{1}{2}$ gr. + $\frac{1}{2.4}$ gr. = $\frac{1}{8.8.9}$ rthlr. + $\frac{1}{4.8.9}$ rthlr. = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$) $\frac{1}{36}$ rthlr. = ($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4.4}$) $\frac{1}{18}$ rthlr. = ($\frac{1}{7}$ + $\frac{1}{4.8}$) $\frac{1}{9}$ rthlr.

6 pf. = $\frac{3}{4}$ gr. = (1 – $\frac{1}{4}$) rthlr. = $\frac{1}{3.4.4}$ rthlr. = $\frac{1}{4.12}$ rthlr.

7 pf. = $\frac{7}{8}$ gr. = 1 gr – $\frac{1}{8}$ gr. = $\frac{1}{4.12}$ rthlr. + $\frac{1}{8.3.12}$ rthlr. = ($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4.6}$) $\frac{1}{12}$ rthlr. = ($\frac{1}{8}$ + $\frac{1}{8.6}$) $\frac{1}{6}$ rthlr.

§. 109.

Jetzt noch Beyspiele, die zeigen sollen, wie jene Reduktionen vortheilhaft angewendet werden.

1 ℔. kostet 13 gute Groschen, wie viel kosten 279 ℔. ?

da 13 gr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2}.\frac{1}{12}$ rthlr. ist, so rechnet man, wie folget:

279 rthlr.

2) ———————

139 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2}$ 379 rthlr.

12) 11 rthlr. 15 gr. $= \frac{1}{12}$. (139 rthlr. + 12 gr.)

———————————

151 rthlr. 3 gr. $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{12})$. 279 rthlr.

Es ist nämlich hier erst die Hälfte von 279 genommen, diese beträgt 139 rthlr. 12 gr.; diese Zahlen wiederum mit 12 dividirt, giebt 11 rthl. 15 gr.; beyde Zahlen zusammen addirt, geben 151 rthlr. 3 gr., welches das richtige Resultat ist.

Dich Richtigkeit des Verfahrens wird man leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß man hier 279 mit $\frac{1}{2}\frac{3}{4}$ rthl. multipliziren muß, um das gesuchte Facit zu haben; ich nehme daher statt $\frac{1}{2}\frac{3}{4}$ rthlr. ein gleiches $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{12})$ rthlr. und multiplizire 279 damit, so erhalte ich ebenfalls das Verlangte, und zwar ist allerdings die letztere Multiplikation leichter, als die erstere.

Da $\frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2}.\frac{1}{12}$ rthlr. $= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{12})$ rthlr. ist, so hätte man auch so rechnen können:

279 rthlr.

12) 23 rthlr. 6 gr. addirt.

———————————

302 rthlr. 6 gr. $= (1 + \frac{1}{12})$. 279 rthlr.

2) ———————————

151 rthlr. 3 gr. $= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{12})$. 279 rthlr.

Die

Die 279 Rth. betrachte ich blos als eine unbekannte Zahl, weil die Benennung Rth. sich durch die Division mit dem ersten Gliede 1 Rth. würde aufgehoben haben, und da muß allerdings das Produkt ($\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{1}.\frac{1}{1\,2}$ rthlr.). 279 $= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1\,2})$ rthlr. 279 $= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1\,2})$. 1 rthlr. 279 $= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1\,2})$. 279 rthlr. Thaler und Theile des Thalers zum Resultate geben. Aus dieser Vorstellung erhellet zugleich, daß ich auch 279 als so viel Thaler betrachten, und den andern Faktor $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1\,2})$ als unbenannt ansehen darf; diese Verwechselung der Benennung ist zwar nicht nothwendig, aber doch zu empfehlen, weil in den meisten Fällen, wie hier 279 der Multiplikandus, und $\frac{1}{2}$ rthlr : $\frac{1}{1\,2}$ rthlr. den Multiplikator bedeuten, und dieser letzte muß immer unbenannt seyn, weil eine Sache, Thaler mal nehmen, keinen Sinn hat, wohl aber der umgekehrte Fall.

Was ich hier bey diesem Exempel erinnert habe, gilt bey allen folgenden, und ist wichtig, da in den gewöhnlichen Rechenbüchern selten die Gründe des Verfahrens gezeigt werden. Da 13 gr. auch $= \frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{2}.\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$ rthlr ist, so stehet hiernach die Rechnung wie folget.

279 rthlr.

3) 93 rthlr. $= \frac{1}{3}$ rthlr. . 279 rthlr.

2) 46 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2}$. 93 rthlr.

4) 11 rthlr. 15 gr. $= \frac{1}{4}$. 46 rthlr. 12 gr.

addirt.

151 rthlr. 3 gr. $= (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{6} + \frac{1}{4}.\frac{1}{6})$. 279 rthlr.

Diese Rechnung ist nicht so kurz, als die vorhergehende, doch läßt sich auch hier noch eine Veränderung anbringen, die aber im Wesentlichen mit dieser übereinkommt. Nämlich: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{6} = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4})$, und hiernach stehet die Rechnung so:

279 rthlr.

279 rthlr. = 1 . 279 rthlr.

2) 139 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 279 rthlr.

4) 34 rthlr. 21 gr. = $\frac{1}{4}$. 139 rthlr. 12 gr.

addirt.

453 rthlr. 9 gr. = $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4})$. 279 rthl.

3)

151 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4})$. 279 rthl.

---

1 ℔. kostet 5 gr., was kosten 552 ℔.?

Da = = 5 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.

oder = = $\frac{1}{4}$ rthlr. − $\frac{1}{4.6}$ rthlr.

oder = = $\frac{1}{3}$ rthlr. − $\frac{1}{8}$ rthlr.

so finden folgende drey verschiedene Rechnungen statt.

6) 552 rthlr.

92 rthlr. = $\frac{1}{6}$. 552 rthlr.

4) 23 rthlr. = $\frac{1}{4}$. 92 rthlr.

addirt.

Facit = 115 rthlr. = $(\frac{1}{6} + \frac{1}{4.6})$. 552 rthlr.

4) 552 rthlr.

138 rthlr. = $\frac{1}{4}$. 552 rthlr.

6) 23 rthlr. = $\frac{1}{6}$. 138 rthlr.

subtrahirt.

Facit: 115 rthlr. = $(\frac{1}{4} - \frac{1}{4.6})$. 552 rthlr.

3) 552 rthlr.

184 rthlr. = $\frac{1}{3}$. 552 rthlr.

8) 69 rthlr. = $\frac{1}{8}$. 552 rthlr.

subtrahirt.

Facit: 115 rthlr. = $(\frac{1}{3} - \frac{1}{8})$. 552 rthlr.

Alle diese drey Arten sind gleich kurz, und keine hat vor der andern im Allgemeinen Vorzüge, aber gut

ist

ist es, wenn sich ein Anfänger Fertigkeit in allen Arten zu erwerben sucht.

---

1 Stück kostet 7 gr., wie viel kosten 288 Stück?

Da : 7 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.
oder : = $\frac{1}{8}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr.
oder : = $\frac{1}{3}$ rthlr. − $\frac{1}{3.8}$ rthlr.

so kann man hier auf folgende 3 Arten rechnen.

4) 288 rthlr.
72 rthlr. = $\frac{1}{4}$. 288 rthlr.
6) 12 rthlr. = $\frac{1}{6}$. 72 rthlr.
addirt.
Facit: 84 rthlr. = ($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4.6}$) . 288 rthlr.

8) 288 rthlr.
36 rthlr. = $\frac{1}{8}$. 288 rthlr.
6) 48 rthlr. = $\frac{1}{6}$. 288 rthlr.
addirt.
Facit: 84 rthlr. = ($\frac{1}{8}$ + $\frac{1}{6}$) . 288 rthlr.

3) 288 rthlr.
96 rthlr. = $\frac{1}{3}$. 288 rthlr.
8) 12 rthlr. = $\frac{1}{8}$. 96 rthlr.
subtrahirt.
Facit: 84 rthlr. = ($\frac{1}{3}$ − $\frac{1}{3.8}$) . 288 rthlr.

---

1 Fuß kostet 9 gr., was kosten 881 Fuß?

Da : 9 gr. = $\frac{3}{8}$ rthlr.
oder : = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.
oder : = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.8}$ rthlr.
oder : = $\frac{1}{2}$ rthlr. − $\frac{1}{2.4}$ rthlr.

so sind hiernach folgende 4 verschiedene Rechnungen möglich:

881 rthlr. . 3
2643 rthlr. = 3 . 881 rthlr.
8)
Facit: 330 rthlr. 9 gr. = $\frac{3}{8}$ 881 rthlr.

881 rthlr.
4)
220 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{4}$. 881 rthlr.
2) 110 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{2}$. 220 rthlr. 6 gr.
Facit: 330 rthlr. 9 gr. = $(\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4})$. 881 rthlr.

881 rthlr.
3)
293 rthlr. 16 gr. = $\frac{1}{3}$. 881 rthlr.
8) 36 rthlr. 17 gr. = $\frac{1}{8}$. 293 rthlr. 16 gr.
Facit: 330 rthlr. 9 gr. = $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.8})$. 881 rthlr.

881 rthlr.
2)
440 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 881 rthlr.
4) 110 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{4}$. 400 rthlr. 12 gr.
Facit: 330 rthlr. 9 gr. = $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.4})$. 881 rthlr.

In den meisten Fällen möchte hier die erste Art den Vorzug verdienen; nach ihr folgt die 2te und 4te Art, denn diese haben die kleinsten Divisoren.

---

1 ℔. kostet 11 gr., wie viel kosten 2137 ℔.?

Nun sind 11 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr.
oder = = = $\frac{1}{2}$ rthlr. − $\frac{1}{2.12}$ rthlr.
oder = = = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.12}$ rthlr.

oder = = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{5}$ rthlr. + $\frac{1}{4.5}$ rthlr.
oder , = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr.

Demnach haben wir 5 verschiedene Rechnungen, wie folget.

2137 rthlr.
3) ——————
712 rthlr. 8 gr. = $\frac{1}{3}$. 2137 rthlr.
8) 267 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{8}$. 2137 rthlr.
Facit: 979 rthlr. 11 gr. = ($\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{8}$) . 2137 rthlr.

2137 rthlr.
3) ——————
712 rthlr. 8 gr. = $\frac{1}{3}$. 2137 rthlr.
4) 178 rthlr. 2 gr. = $\frac{1}{4}$. 712 rthlr. 8 gr.
2) 89 rthlr. 1 gr. = $\frac{1}{2}$. 178 rthlr. 2 gr.
Facit: 979 rthlr. 11 gr. = ($\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3.4}$ + $\frac{1}{2.12}$) . 2137 rthlr.

2137 rthlr.
4) ——————
534 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{4}$. 2137 rthlr.
6) 356 rthlr. 4 gr. = $\frac{1}{6}$. 2137 rthlr.
4) 89 rthlr. 1 gr. = $\frac{1}{4}$. 356 rthlr. 4 gr.
Facit: 979 rthlr. 11 gr. = ($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{4.6}$) . 2137 rthl.

2137 rthlr.
4) ——————
534 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{4}$. 2137 rthlr.
2) 267 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{2}$. 534 rthlr. 6 gr.
3) 178 rthlr. 2 gr. = $\frac{1}{3}$. 534 rthlr. 6 gr.
Facit: 979 rthlr. 11 gr. = ($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{2.4}$ + $\frac{1}{3.4}$) 2137. rth.

2137 rthlr.

2) ——————

1068 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 2137 rthlr.

12) 89 rthlr. 1 gr. = $\frac{1}{12}$. 1068 rthlr. 12 gr.

Facit: 979 rthlr. 11 gr. = ($\frac{1}{2}-\frac{1}{1.12}$) . 2137 rthlr.

Die erste Art verdient hier wohl den Vorzug, dann folgt die letzte, und auf diese die andern, wie sie hier folgen.

---

1 Stück kostet 14 gr., wie theuer sind 1727 Stück?

14 gr. sind = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr.
oder = $\frac{7}{12}$ rthlr.

1757 rthlr.

2) ——————

863 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 1727 rthlr.

6) 143 rthlr. 22 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. 863 rthl. 12 gr.

Facit: 1007 rthlr. 10 gr. = ($\frac{1}{2}+\frac{1}{2.6}$) . 1727 rthlr.

1727 rthlr.

3) ——————

575 rthlr. 16 gr. = $\frac{1}{3}$. 1727 rthlr.

4) 431 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{4}$. 1727 rthlr.

Facit: 1007 rthlr. 10 gr. = ($\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$) . 1727 rthlr.

1727 rthlr.

dividirt mit 12) ——————

143 rthlr. 22 gr. ——— 7 multipl.

Facit: = = 1007 rthlr. 10 gr.

Diese letzte Art erspart zwar eine Addition, allein da mit 12 dividiren, und diesen Quotienten wiederum mit 7 multipliziren offenbar in vielen Fällen schwieriger

seyn dürfte, als bloß mit 3 und 4 dividiren, und diese Quotienten zu addiren, so verdienen die 2 ersten Arten wohl im Allgemeinen den Vorzug.

---

1 Schock kostet 15 gr., wie viel kosten 935 Schock?

15 gr. = $\frac{5}{8}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.

935 rthlr. — 5 multipl.
dividirt 8) 4675
584 rthlr. 9 gr. das gesuchte Facit.

2) 935 rthlr.
467 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 935 rthlr.
4) 116 rthlr. 21 gr. = $\frac{1}{4}$. 467 rthlr. 12 gr.
Facit: 584 rthlr. 9 gr. = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2.4}$) . 935 rthlr.

---

1 Schock kostet 16 gr., wie viel werden 787 Schock kosten?

Es sind 16 gr. = $\frac{2}{3}$ rthlr.
oder = 1 rthlr. − $\frac{1}{3}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr.

787 rthlr. — 2 multipl.
3) 1574
524 rthlr. 16 gr. gleich dem gesuchten Resultate.

787 rthlr.

3) 262 rthlr. 8 gr. = $\frac{1}{3}$. 787 rthlr.

Facit: 524 rthlr. 16 gr. = (1 − $\frac{1}{3}$) . 787 rthlr.

787 rthlr.

2) ———————

393 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 787 rthlr.

3) 131 rthlr. 4 gr. = $\frac{1}{3}$. 393 rthlr.

Facit: 524 rthlr. 16 gr. = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2.3}$) . 787 rthlr.

Die beyden ersten Arten verdienen den Vorzug.

---

1 Schock kostet 17 gr, was kosten 432 Schock?

17 gr. sind gleich $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.
oder = $\frac{2}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.8}$ rthlr.

432 rthlr.

2) ———————

216 rthlr. = $\frac{1}{2}$. 432 rthlr.

3) 72 rthlr. = $\frac{1}{3}$. 216 rthlr.

4) 18 rthlr. = $\frac{1}{4}$. 72 rthlr.

Facit: 406 rthlr. = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2.3}$ + $\frac{1}{4.6}$) . 432 rthlr.

432 rthlr.

8) ———————

144 rthlr. = $\frac{1}{3}$. 432 rthlr.

(2 ———————

288 rthlr. = 2 . 144 rthlr.

8) 18 rthlr. = $\frac{1}{8}$. 144 rthlr.

Facit: 306 rthlr. = ($\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{3.8}$) . 432 rthlr.

---

1 Loth

1 Loth kostet 18 gr., was kosten 653 Loth?

18 gr. = $\frac{3}{4}$ rthlr.
oder = 1 rthlr. – $\frac{1}{4}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.2}$ rthlr.

653 rthlr.
——————— 3 multipl.
1959 rthlr.
dividirt 4) ———————
Facit: 489 rthlr. 18 gr. = $\frac{3}{4}$. 563 rthlr.

653 rthlr.
4) 163 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{4}$. 653 rthlr.
Facit: 489 rthlr. 18 gr. = $(1-\frac{1}{4})$. 653 rthlr.

653 rthlr.
2) ———————
326 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 653 rthlr.
2) 163 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{2}$. 326 rthlr. 12 gr.
Facit: 489 rthlr. 18 gr. = $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2})$. 653 rthlr.

---

1 Loth kostet 19 gr., wie viel kosten 523 Loth?

19 gr. = $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{4.6})$ rthlr.
oder = $(\frac{3}{4}+\frac{1}{4.6})$ rthlr.
oder = $(\frac{5}{6}-\frac{1}{4.6})$ rthlr.

523 rthlr.
2) ———————
261 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 523 rthlr.
2) 130 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{2}$. 261 rthlr. 12 gr.
6) 21 rthlr. 19 gr. = $\frac{1}{6}$. 130 rthlr. 18 gr.
Facit: 414 rthlr. 1 gr. = $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{4.6})$. 523 rthl.

523 rthlr.
dividirt 4) ———————
130 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{4}$. 523 rthlr.
——————— 3 multipl.
362 rthlr. 6 gr. = $\frac{3}{4}$. 523 rthlr.
6) 21 rthlr. 19 gr. = $\frac{1}{6}$. 130 rthlr. 18 gr.
Facit: 414 rthlr. 1 gr. = ($\frac{3}{4} + \frac{1}{4.6}$) . 523 rthlr.

523 rthlr.
6) ———————
87 rthlr. 4 gr. = $\frac{1}{6}$. 523 rthlr.
——————— 5)
435 rthlr. 20 gr. = $\frac{5}{6}$. 523 rthlr.
4) 21 rthlr. 19 gr. = $\frac{1}{4}$. 87 rthlr. 4 gr.
Facit: 414 rthlr. 1 gr. = ($\frac{5}{6} + \frac{1}{4.6}$) . 523 rthlr.

1 ℔. kostet 20 gr., was kosten 489 ℔.?

20 gr. = $\frac{1}{5}$ rthlr.
oder = (1 – $\frac{1}{6}$) rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr.

489 rthlr.
6) ———————
81 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{6}$. 489 rthlr.
——————— (5
Facit: 407 rthlr. 12 gr. = $\frac{5}{6}$. 489 rthlr.

489 rthlr.
6) ———————
81 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{6}$. 489 rthlr.
———————
Facit: 407 rthlr. 12 gr. = (1 – $\frac{1}{6}$) . rthlr.

489 rthlr.
2) ———————
244 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 489 rthlr.
3) 163 rthlr. : : = $\frac{1}{3}$. 489 rthlr.
Facit: 407 rthlr. 12 gr. = ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$) . 489 rthlr.

Wie viel kosten 634 Rth., wenn 1 Rth. 21 gr. kostet?

Da 21 gr. $= \frac{7}{8}$ rthlr.

oder $= (1 - \frac{1}{8})$ rthlr.

oder $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.4}$ rthlr.

oder $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.8}$ rthlr.

Demnach haben wir 4 verschiedene Arten, dieser Exempel auszurechnen, von denen die 2 ersten und vorzüglich die 2te den Vorzug verdient.

634 rthlr.

8) ——————

79 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{8}$. 634 rthlr.

(7

Facit: 554 rthlr. 18 gr. $= \frac{7}{8}$. 634 rthlr.

634 rthl.

8) 79 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{8}$. 634 rthl.

Facit: 554 rthlr. 18 gr. $= (1 - \frac{1}{8})$. 634 rthlr.

634 rthlr.

3) ——————

317 rthlr. $= \frac{1}{2}$. 634 rthlr.

2) 158 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2}$. 317 rthlr.

2) 79 rthlr. 6 $= \frac{1}{2}$. 158 rthlr. 12 gr.

Facit: 554 rthlr. 18 gr. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.4})$. 634 rthl.

634 rthlr.

2) ——————

317 rthlr. $= \frac{1}{2}$. 634 rthlr.

3) 211 rthlr. 8 gr. $= \frac{1}{3}$. 634 rthlr.

8) 26 rthlr. 10 gr. $= \frac{1}{8}$. 211 rthlr. 8 gr.

Facit: 554 rthlr. 18 gr. $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.8})$. 634 rthl.

Wie

Wie viel kosten 349 Rb., wenn das Rb. 22 gr. kostet?

22 gr. = 1 rthlr. − $\frac{1}{12}$ rthlr.
oder = $\frac{5}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr.
oder = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3.4}$) rthlr.

349 rthlr.
12) 29 rthlr. 2 gr. = $\frac{1}{12}$. 349 rthlr.
Facit: 319 rthlr. 22 gr. = (1 − $\frac{1}{12}$) . 349 rthlr.

349 rthlr.
6) 58 rthlr. 4 gr. = $\frac{1}{6}$. 349 rthlr.
5)
290 rthlr. 20 gr. = $\frac{5}{6}$. 349 rthlr.
29 rthlr. 2 gr. = $\frac{1}{2}$. 58 rthlr.
Facit: 319 rthlr. 22 gr. = ($\frac{5}{6}$ + $\frac{1}{2.6}$) rthlr. 349 rthlr.

349 rthlr.
2) 174 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 349 rthlr.
3) 116 rthlr. 8 gr. = $\frac{1}{3}$. 349 rthlr.
4) 29 rthlr. 22 gr. = $\frac{1}{4}$. 116 rthlr. 8 gr.
Facit: 319 rthlr. 22 gr. = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3.4}$) . 349 rthlr.

Die erste Art verdient den Vorzug.

---

1 Schock kostet 23 gr., was kosten 281 Schock?

23 gr. = 1 rthlr. − $\frac{1}{24}$ rthlr.
oder = $\frac{5}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.

281 rthlr.
24) 11 rthlr. 17 gr. = $\frac{1}{24}$. 281 rthlr.
Facit: 269 rthlr. 7 gr. = (1 − $\frac{1}{24}$) . 281 rthlr.

281 rthlr.

(5

1405 rthlr. = 5 . 281 rthlr.

6)

234 rthlr. 4 gr. = $\frac{1}{6}$. 1405 rthlr.

35 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{8}$. 281 rthlr.

Facit: 296 rthlr. 7 gr.

281 rthlr.

2)

140 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 281 rthlr.

3) 93 rthlr. 16 gr. = $\frac{1}{3}$. 281 rthlr.

4) 35 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{4}$. 140 rthlr. 12 gr.

Facit: 269 rthlr. 7 gr. = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2.4})$. 281 rthlr.

Am kürzesten ist offenbar die erste Art, nur muß man schnell mit 24 zu dividiren wissen.

---

1 Stück kostet 1 pf., wie viel kosten demnach 570 Stück?

Da = . 1 pf. = $\frac{1}{4.6.12}$ rthlr. ist, so ist die Rechnung folgende:

570 rthlr.

4)

142 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{4}$. 570 rthlr.

6)

23 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{6}$. 142 rthlr. 12 gr.

21)

Facit: 1 rthlr. 23 gr. 6 pf. = $\frac{1}{12}$. 23 rthlr. 18 gr.

Wer mit 24 zu dividiren weiß, rechnet auch kürzer so:

570 rthlr.

24)

23 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{24}$. 570 rthlr.

12)

Facit: 1 rthlr. 23 gr. 6 pf. $\frac{1}{12.24}$. 570 rthlr.

---

1 loth

1 Loth kostet 2 pf., wie viel kosten 432 Loth?

Es sind = = 2 pf. = $\frac{1}{12.12}$ rthlr.

Demnach stehet die Rechnung so:

Dividirt mit 12) 432 rthlr.

33 rthlr.

Dividirt mit 12)

Facit: = = 3 rthlr.

---

1 Loth kostet 3 pf., was kosten 234 Loth?

3 pf. sind = $\frac{1}{8.12}$ rthlr.

8) 234 rthlr.

29 rthlr. 6 gr.

12)

Facit: = 2 rthlr. 10 gr. 6 pf.

---

1 Loth kostet 4 pf., was kosten 345 Loth?

4 pf. = $\frac{1}{6.12}$ rthlr. = $\frac{1}{8.9}$.

6) 335 rthlr.

57 rthlr. 12 gr.

12)

Facit: 4 rthlr. 19 gr.

8) 345 rthlr.

43 rthlr. 3 gr.

9)

4 rthlr. 19 gr.

Die erste Art verdient den Vorzug, weil, wenn bey der Division mit 9 etwas übrig bleibt, (wie hier 7 übrig bleiben), die Reduktion weit schwieriger ist, als bey der Division mit 12, denn der 2te Theil eines Thalers beträgt gerade 2 Groschen, und der 9te Theil beträgt 2 gr. 8 pf.

Wenn

Wenn ich daher sage: 12 in 57 habe ich 4mal und bleiben 7 Rest, das heißt $\frac{7}{12}$ rthlr. = 7. 2 gr. = 14 gr., so ist dieses weit leichter, als wenn ich sage: 9 in 43 habe ich 4, bleiben 7, das heißt $\frac{7}{9}$ rthlr. = 7. (2 gr. 8 pf.) = 18 gr. 8 pf. Endlich, wenn ich eine Anzahl Groschen durch 12 theile, so giebt der etwa übrig bleibende Rest sogleich die Pfennige, aber nicht so bey 9.

---

1 Elle Band kostet 5 pf., wie viel kosten 456 Ellen?

5 pf. = $\frac{1}{6.12}$ rthlr. + $\frac{1}{6.72}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{6.8}$ rthlr. − $\frac{1}{6.48}$ rthlr.

6) 456 rthlr.
6) 76 rthlr.
12) 6 rthlr. 8 gr.
4) 1 rthlr. 14 gr.

Facit: = 7 rthlr. 22 gr. = $(\frac{1}{6.12} + \frac{1}{2.72})$. 456 rthlr.

8) 456 rthlr.
6) 57 rthlr.
6) 9 rthlr. 12 gr.
1 rthlr. 14 gr.

Facit: : 7 rthlr. 22 gr. = $(\frac{1}{6.8} - \frac{1}{6.48})$. 456 rthlr.

---

1 Elle kostet 6 pf., was kosten 567 Ellen?

6 pf. = $\frac{1}{6.8}$ rthlr.

6) 567 rthlr.
8) 94 rthlr. 12 gr.
Facit: 11 rthlr. 19 gr. 6 pf.

---

1 loth

1 Loth kostet 7 pf., was kosten 578 Loth?

7 pf. = $\frac{1}{6.8}$ rthlr. + $\frac{1}{6.48}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{12}$ ($\frac{1}{8}$ + $\frac{1}{6}$) rthlr.

Demnach stehet nach beyden Arten die Rechnung, wie folget:

578 rthlr.
6) ———————
96 rthlr. 8 gr.
8) ———————
12 rthlr. 1 gr.
6.) 2 rthlr. – gr. 2 pf.
———————
Facit: 14 rthlr. 1 gr. 2 pf. = ($\frac{1}{6.8}$ + $\frac{1}{6.48}$). 578 rthlr.

578 rthlr.
6) ———————
96 rthlr. 8 gr.
8) 72 rthlr. 6 gr.
———————
168 rthlr. 14 gr.
12) ———————
Facit: 14 rthlr. 1 gr. 2 pf. = $\frac{1}{12}$ ($\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{8}$). 578 rthl.

Bey der ersten Art sind die Divisionen 6, 8, 6; bey der zweyten Art 6, 8, 12; also ist die erstere Art, wenn man will, besser.

---

1 Loth kostet 8 pf., was kosten 789 Loth?

8 pf. = $\frac{1}{3.12}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{4.9}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{6.6}$ rthlr.

789 rthl.	789 rthl.	789 rthl.
3) ———	4) ———	6) ———
263 rthl.	197 rthl. 6 gr.	131 rthl. 12 gr.
12 ———	9) ———	6) ———
Facit: 21 rthl. 22 gr.	21 rthl. 22 gr.	21 rthl. 22 gr.

Die

Die erste Art verdient den Vorzug, dann kömmt die zweyte, und dann die dritte Art.

---

1 Loth kostet 9 pf., was kosten 890 Loth?

$$9 \text{ pf.} = \frac{1}{4.8} \text{ rthlr.}$$

490 rthlr.
4) ——————
222 rthlr. 12 gr.
8) ——————
Facit: = 27 rthlr. 19 gr. 6 pf.

---

1 Loth kostet 10 pf., was kosten 901 Loth?

$$10 \text{ pf.} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \text{rthlr.; oder} = \frac{1}{24}\left(1 - \frac{1}{6}\right) \text{rthlr.}$$

901 rthlr.
4) ——————
225 rthlr. 6 gr.
6) 150 rthlr. 4 gr.
——————
375 rthlr. 10 gr.
12) ——————
Facit: = 31 rthlr. 6 gr. 10 pf.

901 rthlr.
6) 150 rthlr. 4 gr.
——————
$(1 - \frac{1}{6})$. 901 rthlr. = 759 rthlr. 20 gr.
24) ——————
$\frac{1}{24}(1 - \frac{1}{6})$. 901 rthl. = 31 rthlr. 6 gr. 10 pf.

---

1 Loth kostet 11 pf., was kosten 1023 Loth?

$$11 \text{ pf.} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4.6}\right) \text{rthlr.}$$
$$\text{oder} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.4}\right) \text{rthlr.}$$

oder $= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.4}\right)$ rthlr.
oder $= \frac{1}{24}\left(1 - \frac{1}{12}\right)$ rthlr.

1023 rthlr.
4) ——————————
255 rthlr. 18 gr. $= \frac{1}{4}$. 1023 rthlr.
6) 170 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{6}$. 1023 rthlr.
4) 42 rthlr. 15 gr. $= \frac{1}{4}$. 170 rthlr.
——————————
468 rthlr. 21 gr. $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4.6}\right)$. 1023 rthlr.
12) ——————————
Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf. $= \frac{1}{12}$. 468 rthlr. 21 gr.

1023 rthlr.
4) ——————————
255 rthlr. 18 gr. $= \frac{1}{4}$. 1023 rthlr.
2) 127 rthlr. 21 gr. $= \frac{1}{2}$. 255 rthlr. 18 gr.
3) 85 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{3}$. 255 rthlr. 18 gr.
——————————
468 rthlr. 21 gr. $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4}\right)$. 1023 thl.
12) ——————————
Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf $= \frac{1}{12}$. 468 rthlr. 21 gr.

1023 rthlr.
2) ——————————
511 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2}$. 1023 rthlr.
2) 255 rthlr. 18 gr. $= \frac{1}{2}$. 511 rthlr.
3) 170 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{3}$. 511 rthlr.
——————————
937 rthlr. 18 gr. $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3}\right)$. 1023 thl.
24) ——————————
Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf. $= \frac{1}{24}$. 937 rthlr. 18 gr.

1023 rthlr.
12) 85 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{12}$. 1023 rthlr.
——————————
937 rthlr. 18 gr.
24) ——————————
Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf.

Diese letzte Art ist ohnstreitig die kürzeste.

§. 110.

Diese Beyspiele zeigen hinlänglich, daß die Kürze der Rechnung hauptsächlich von der geschickten Reduktion der Groschen oder Pfennige auf höhere Einheiten abhängt. Die vorhergehenden Exempel geben den Anfängern dazu eine gute Anleitung, und es ist jedem anzurathen, sich hierin eine Fertigkeit zu erwerben. Ich will daher noch einige Exempel zur Uebung hersetzen.

1 tb. kostet 2 gr. 8 pf., wie viel kosten 785 tb.?

$2\text{ gr.} + 8\text{ pf.} = \frac{1}{12}\text{ rthlr.} + \frac{1}{3.12}\text{ rthlr.} = \frac{3}{3.12}\text{ rthlr.}$
$+ \frac{1}{3.12}\text{ rthlr.} = \frac{4}{3.12}\text{ rthlr.} = \frac{1}{3.3}\text{ rthlr.} = \frac{1}{9}\text{ rthlr.}$

789 rthlr. | 9)

Facit: 87 rthlr. 5 gr. 4 pf.

Wer sehr viel Exempel zu rechnen hat, wo der Preis des Stücks 2 gr. 8 pf. beträgt, dem rathe ich, sich folgender Tafel zu bedienen.

$\frac{1}{9}$	rthlr.	= 2 gr.	8 pf.
$\frac{2}{9}$	–	= 5 –	4 –
$\frac{3}{9}$	–	= 8 –	– –
$\frac{4}{9}$	–	= 10 –	8 –
$\frac{5}{9}$	–	= 13 –	4 –
$\frac{6}{9}$	–	= 16 –	– –
$\frac{7}{9}$	–	= 18 –	8 –
$\frac{8}{9}$	–	= 21 –	4 –

Ich theile hier zugleich eine Tafel für $\frac{1}{18}$ rthlr. mit.

$\frac{1}{18}$	rthlr. =	1 gr.	4 pf.	$\frac{10}{18}$	rthlr. =	13 gr.	4 pf.
2	– =	2 –	8 –	11	– =	14 –	8 –
3	– =	4 –	– –	12	– =	16 –	– –
4	– =	5 –	4 –	13	– =	17 –	4 –
5	– =	6 –	8 –	14	– =	18 –	8 –
6	– =	8 –	– –	15	– =	20 –	– –
7	– =	9 –	4 –	16	– =	21 –	4 –
8	– =	10 –	8 –	17	– =	22 –	8 –
9	– =	12 –	– –				

1 Stück

1 Stück kostet 1 gr. 4 pf., wie viel kosten 851 Stück?

1 gr. + 4 pf. = $\frac{1}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{3 \cdot 24}$ rthlr. = $\frac{3}{3 \cdot 24}$ rthlr. + $\frac{1}{3 \cdot 24}$ rthlr. = $\frac{4}{3 \cdot 24}$ rthlr. = $\frac{1}{3 \cdot 6}$ rthlr. = $\frac{1}{18}$ rthlr.

Diese Reduktion kann kürzer so geschehen.

2 (1 gr. + 4 pf.) = $\frac{1}{9}$ rthlr.; folgt 1 gr. + 4 pf. = $\frac{1}{18}$ rthlr.

18) 851 rthlr.

Facit: 47 rthlr. 6 gr. 8 pf.

Es bleiben nämlich hier 5 übrig, diese in der Tabelle aufgesucht, geben 6 gr. 8 pf.

Wer aber nicht mit 18 auf einmal gut dividiren kann, der kann sich 18 in 3 . 6, oder 2 . 9 zerfällen.

---

1 Stück kostet 1 gr. 6 pf., wie viel kosten 1753 Stück?

1 gr. + 6 pf. = $\frac{1}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{2 \cdot 24}$ rthlr. = $\frac{2}{2 \cdot 24}$ rthlr. + $\frac{1}{2 \cdot 24}$ rthlr. = $\frac{3}{2 \cdot 24}$ rthlr. = $\frac{1}{2 \cdot 8}$ rthlr. = $\frac{1}{16}$ rthlr.

16) 1753 rthlr.

Facit: 109 rthlr. 13 gr. 6 pf.

Hier kann es wiederum vortheilhaft seyn, folgende Tafel zu haben.

$\frac{1}{16}$ rthlr.	=	1 gr.	6 pf.		$\frac{9}{18}$ rthlr.	=	13 gr.	6 pf.
2 –	=	3 –	–		10 –	=	15 –	–
3 –	=	4 –	6 –		11 –	=	16 –	6 –
4 –	=	6 –	–		12 –	=	18 –	–
5 –	=	7 –	6 –		13 –	=	19 –	6 –
6 –	=	9 –	–		14 –	=	21 –	–
7 –	=	10 –	6 –		15 –	=	22 –	6 –
8 –	=	12 –	–					

Wer nicht schnell auf einmal mit 16 dividiren kann, zerfälle sich solche in 4.4, oder in 2.8.

Was kosten 56 Lasten, wenn 1 Scheffel 1 rthlr. 10 gr. kostet? (Die Last Getraide in Berlin hält 3 Wispel, und der Wispel 24 Scheffel).

Da 1 rthlr. + 10 gr. = 34 gr. = 2. 17 gr.; so hat man hier 2.56.3.17 rthlr. = 56.6.17 rthlr.

also 56
392
——— (17
952
——— (6
Facit: 5712 rthlr.

Nämlich 56 Lasten geben 3. 56 Wispel = 24.3.56. Scheffel, diese kosten 24.3.56.2.17 gr. = $\frac{24.3.56.2.17}{24}$ rthlr.

Da der Wispel eben so viel Scheffel, als der Thaler Groschen enthält, so erhalten wir dadurch folgende Vortheile.

Wenn der Preis eines Scheffels gegeben ist, und man den Preis einer Anzahl von Wispeln finden soll, so hat man nur nöthig, die Zahl der Wispel mit der Zahl der Groschen zu multiplizieren, und zu dem Produkte die Benennung Thaler zu setzen; soll aber der Preis mehrerer Lasten gefunden werden, so multipliziret man die Anzahl der Lasten erst mit der gedachten Anzahl der Groschen, und dieß Produkt alsdann noch mit 3.

Nach dieser Regel hätte ich 56 mit 34, und das daher entstehende Produkt noch einmal mit 3 multiplizieren sollen, da aber 34.3 = 17.6 ist, so habe ich diese letzten Faktoren gewählt, weil mit ihnen am kürzesten zu rechnen ist.

Ein ähnlicher Vortheil findet bey der Rechnung mit Schocken statt. Es ist nämlich der Preis eines

Schockes

Schockes immer so vielmal 5 gr., als ein Stück Pfennige, und so vielmal $2\frac{1}{2} = \frac{10}{4}$ rthlr., als ein Stück Groschen kostet. Denn, wenn 1 Stück 1 Pfennig kostet, so kostet 1 Schock 60 Pfennige = 5 gr., und kostet ein Stück 1 gr., so kostet ein Schock 60 gr. $= 2\frac{1}{2}$ rthlr. $= \frac{10}{4}$ rthlr.

Was kosten 108 Schock, à 3 pf. 1 Stück?

Das Schock kostet also 3 . 5 gr. = 15 gr. $= \frac{5}{8}$ rthlr.

Demnach = 108 rthlr. (5

540 rthlr.

8)

67 rthlr. 12 gr.

Was kosten 316 Schock, à 1 gr. das Stück?

Das Schock kostet also $\frac{10}{4}$ rthlr.

Mithin kosten 316 Schock $\frac{316 \cdot 10}{4}$ rthlr. = 790 rthlr.

Was kosten 112 Schock, à 1 gr. 3 pf. das Stück?

Das Schock kostet also $\frac{10}{4}$ rthlr. + $\frac{5}{8}$ rthlr. = $(\frac{20}{8} + \frac{5}{8})$ rthlr. = $\frac{25}{8}$ rthlr. = $\frac{100}{8}$ rthlr. Demnach stehet die Rechnung so: 112 . .

4)

2800

8)

350 rthlr.

Dieses Exempel stehet, so wie auch die 3 vorhergehenden, in des berühmten Herrn Professor Michelsen: **Versuche in Sokratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik** *).

*) Von diesen Sokratischen Gesprächen der Arithmetik sind drey Bände in Berlin bey Fr. Maurer erschienen. Der erste

Band

Zweyter Band. Seite 236. Hr. Michelsen rechnet seinem Zwecke gemäß diese Exempel nicht so kurz, als ich. In der Rechnung des letztern Exempels ist bey Hrn. Michelsen ein Rechnungsfehler; statt $37\frac{1}{3}$ sollte 14, und statt $373\frac{1}{3}$ sollte 350 stehen.

Was kosten 7 Centner 80 ℔., wenn 100 ℔. 16 rthlr. 12 gr. kosten? (Der Centner zu 100 ℔. gerechnet).

21 gr. $=$ $\frac{1}{2}$ rthlr. $+$ $\frac{1}{2 \cdot 2}$ rthlr. $+$ $\frac{1}{2 \cdot 4}$ rthlr.;
Daher stehet die Rechnung, wie folget.

7 Ct. 80 ℔.	0,43 rthlr. (24
850 ℔.	10,32 gr.
5100 (16	0,32 gr.
2) 425	0,18 gr.
2) 212 – 12 gr.	0,50 gr. $=$ 6 pf.
2) 106 – 6 gr.	
143,43 rthlr. 18 gr.	
100	

Also das Resultat $=$ 143 rthlr. 10 gr. 6 pf.

So stehet diese Aufgabe mit einigen Rechnungsfehlern in Hrn. Michelsens oben genanntem Buch Seite 230.

Ich würde hier weit kürzer so rechnen:

Die 7 Ct. 80 ℔. sind $=$ 850 ℔., diese sogleich mit 100 ℔. dividirt geben 8, 5 $=$ $8\frac{1}{2}$.

16

Band ist von 1784, der zweyte von 1785., der dritte von 1786. Aber nur der erste Band ist in Gesprächen geschrieben. Der gelehrte Verfasser verließ diesen Weg, um in den folgenden Bänden mehr Materien zu berühren, als bey der Beybehaltung der Gespräche möglich gewesen wäre. Daher ist der 2te und 3te Band auch unter folgendem Titel zu haben: Anleitung zur praktischen Rechenkunst.

16 rthlr. 21 gr.
———————————— (8
135 rthlr. : . = ⅛ (16 rthlr. + 21 gr.)
2) 8 rthlr. 10 gr. 6 pf. = ½ (16 rthlr. 21 gr.)
————————————
143 rthlr. 10 gr. 6 pf.

Wenn die Sonne 24000 Erdhalben von der Erde entfernt ist, und sich die Entfernungen der Erde, des Jupiters und des Uranus von der Sonne wie 5:26:98 verhalten: wie weit müssen Jupiter und Uranus von der Sonne entfernt seyn?

Antwort: { Jupiter 124000 / Uranus 470400 } Erdhalbmesser.

Das Verhältniß der Elasticität der siedenden Wasserdämpfe ist bey 80,104,110 Grad Wärme nach Reaumür, und nach den von Betanwurf darüber angestellten Versuchen durch die Zahlen 14, 42 und 49 ausgedrückt. Bey 80 Graden über die erhitzten Wasserdämpfe auf jeden Quadratfuß einen Druck von 2216⅔ ℔. Wie groß ist dieser Druck auf jede Quadratfußfläche bey 104 und 110 Graden?

Antwort: 6650 ℔. bey 104 Grad,
und 7758⅔ ℔. bey 110 Grad.

§. 111.

Bey der Berlinischen Banque machen 100 Bc. ℔. den Werth von 125 rthlr. in Frd'or, oder von 131¼ rthlr. in Courant. Um nun Bc. ℔. in Frd'or oder Courant und umgekehrt zu verwandeln, sind folgende Regeln richtig und bequem zur Anwendung.

1. Bc. ℔. in Rthlr. in Golde zu verwandeln, darf man nur die Summe der Bc. ℔. um ihren vierten Theil vergrößern.

2. Bc. ℔. in Courant zu verwandeln, hat man nur nöthig die Summe der Bc. ℔. um ihren vierten

und

und um den vierten Theil des vierten Theils zu vergrößern.

3. Rthlr. in Golde in Bc. ℔. zu verwandeln, darf man nur von der Summe der Rthlr. ihren fünften Theil abziehen.

4. Courant in Bc. ℔. zu verwandeln, sucht man von ihrer Summe $\frac{1}{3}$, von diesem Drittel $\frac{1}{7}$, addirt beyde und multiplizirt die gefundene Summe mit 2.

Exempel mögen diese Regeln erläutern.

Wie viel betragen 7354 Bc. ℔. in Frd'or?

Stehet nach der ersten Regel so:

7354 Rthlr.
4) 1838 Rthlr. 12 gr.

Facit: 9192 Rthlr. 12 gr.

Der Grund ist dieser: da 100 Bc. ℔. = 125 Rthlr. in Golde, so ist 1 Bc. ℔. = 1, 25 = $1\frac{1}{4}$ Rthlr., folglich betragen 7354 Bc. ℔.; 7354 . $1\frac{1}{4}$ Rthlr. in Golde.

Wie viel betragen 1321 Bc. ℔. in Courant?

Nach der zweyten Regel stehet die Rechnung hier so:

1321 Rthlr.
4) 330 Rthlr. 6 gr.
4) 82 Rthlr. 13 gr. 6 pf.

Facit: 1733 Rthlr. 19 gr. 6 pf.

Beweis der Regel. 100 Bc. ℔. = $131\frac{1}{4}$ Rthlr. Courant. Daher 1 Bc. ℔. = 1, $31\frac{1}{4}$ = 1, $\frac{125}{4}$ = $1 + \frac{1}{4}$. 1, 25 = $1 + \frac{1}{4}$. $1\frac{1}{4}$ = $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$, und folglich machen 13 ℔. Bc. $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4})$. 1321 Rthlr. Courant aus.

Wie

Wie viel Bc. ℔. erhält man für 2048 rthlr. in Frd'or.?

Nach No. 3. stehet die Rechnung so:

2048
5) 409$\frac{3}{5}$
1638$\frac{2}{5}$ Bc. ℔.

Dieses Exempel stehet in Herrn Professor Michelsens Arithmetik, 2r Theil, Seite 271, es sind dort Rechnungsfehler.

Beweis der Regel. Da 110 Bc. ℔. = 125 Rthlr. Gold, so ist $\frac{100}{125} = \frac{4}{5} = (1 - \frac{1}{5})$ Bc. ℔. = 1 Rthlr. Gold, daher 2048 Rthlr. in Gold = $(1 - \frac{1}{5})$ Bc. ℔. . 2048 sind.

Wie viel Bc. ℔. erhält man für 967 rthlr. 7 gr. 9 pf. in Courant?

Nach der 4ten Regel stehet die Rechnung so:

967 Rthlr. 7 gr. 6 pf.
3.)
322 : 10 : 6 :
7) 46 : 1 : 6 :
368 Rthlr. 12 gr.
2)
Facit: 737 Bc. ℔.

Beweis der 4ten Regel. Da 100 Bc. ℔. = 131$\frac{1}{4}$ Rthlr. Courant, oder 100 = £$\frac{25}{4}$, = so sind $\frac{400}{525}$ Bc. ℔. = 1 Rthlr. Courant; aber $\frac{400}{525} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{25} =$
$\frac{4}{5\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{21}{4}} = \frac{16}{21} = \frac{14}{21} + \frac{2}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 7}2 = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7})$;
daher betragen 967 Rthlr. 7 gr. 6 pf. Courant, $2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7})$ (967 Rthlr. 7 gr. 6 pf.) Bc. ℔.

Man bezeichne durch B, G, C, Bc. ℔., Gold und Courant, so lassen sich obige 4 Regeln durch folgende Formeln bequem darstellen.

1) $G = (1 + \frac{1}{24}) . B.$
2) $C = (1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{24.24}) . B$
3) $B = (1 - \frac{1}{25}) . G;$
4) $B = 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7}) . C.$

Der Mathematiker rechnet lieber nach solchen Formeln, als nach Regeln in Worten ausgedrückt, weil er jene weit eher übersehen kann, und ein jeder wird solchen Formeln den Vorzug einräumen, sobald er nur die lakonische Sprache der Mathematiker versteht.

§. 112.

Da 14 Thlr. Hannöverisch Kassengeld = 15 Thlr. Gold sind, so ist 1 Thlr. Hannöverisch Kassengeld $= \frac{15}{14} = (1 + \frac{1}{14})$ Thlr. Gold; und eben so 1 Thlr. Gold $= \frac{14}{15} = (1 - \frac{1}{15})$ Thlr. Hannöverisch Kassengeld. Es bedeute hier wieder G Gold, und H Hannöverisch Kassengeld, so ist allgemein:

1) $G = (1 + \frac{1}{14}) . H;$ 2) $H = (1 - \frac{1}{15} . G.$

Wie viel betragen 3572 Thaler Kassengeld in Golde?

Nach No. 1. ist die Rechnung so:

$$14) \quad \frac{3572}{255\frac{1}{7}}$$

Facit: 3927 Thlr. Gold. = 3827 Thlr. 5 Mgr. $1\frac{1}{7}$ pf.

Denn: $\frac{1}{7}$ Thlr. = $\frac{36}{7}$ Mariengroschen = $5\frac{1}{7}$ Mgr.; $\frac{1}{7}$ Mgr. = $\frac{8}{7}$ pf. = $1\frac{1}{7}$ pf.

Ich habe diese Aufgabe aus Herrn Hofrath Kästners Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf man-

mancherley Geschäfte Seite 108 entlehnt *). Mittelst der Logarithmen findet dieser große Mathematiker 3827 Thlr. 5 Mgr. 0, 32 pf. Gold, fehlt also noch nicht um einen ganzen Pfennig. Allein, obgleich hierdurch die Sicherheit des Gebrauchs der Logarithmen erhellet, so würde ich hier doch nie Logarithmen brauchen, indem ein jeder nach der von mir gezeigten Art weit schneller und auch bequemer rechnet, als selbst auch derjenige rechnen würde, der mit Kästnerischen Scharfsinn die Logarithmen anzuwenden weiß. Wer nach meiner Vorschrift nicht auf einmal mit 14 oder 15 zu dividiren weiß, rechnet auch noch immer kurz, wenn er mit 2.7 oder 3.5, das heißt, mit jedem Faktor dividirt; indessen, wer dergleichen Rechnungen viel und oft zu machen hat, erwirbt sich leicht die Fertigkeit mit 14 und 15 zu dividiren. Ich kann dieses aus eigener Erfahrung versichern, da ich im Jahre 1790. für einen meiner Verwandten dergleichen Rechnungen in großer Anzahl zu machen hatte. Dieses war mit eine Veranlassung zu manchen Erfindungen, indem ich gezwungen war, auf Abkürzungen der Rechnungen zu denken, mit denen ich mich damals beschäftigen mußte; dadurch erhielt ich auch eine ungemeine Fertigkeit im schnellen Rechnen, selbst mit ziemlich großen Zahlen.

Um doch hier etwas von meinen Erfindungen mitzutheilen, so will ich für No. 1. und 2. eine Tafel konstruiren, wodurch G und H ohne Rechnung gefunden wird.

Tabelle,

---

*) Diese Fortsetzung der Rechenkunst erschien 1786., und soll als die zweyte Abtheilung des ersten Theils der vortrefflichen Anfangsgründe der Mathematik eben dieses verehrungswürdigen Greises angesehen werden. Sie ist ein wahrer Prüfstein zu wissen, ob Jemand die Arithmetik wissenschaftlich studirt habe.

Tabelle, zur Verwandlung des Hannöverschen Kassengeldes in Gold.

Groschen.	Pfennige.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238
2	$4\frac{4}{7}$	1	15	29	43	57	71	85	99	113	127	141	155	169	183	197	211	225	239
5	$1\frac{1}{7}$	2	16	30	44	58	72	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	240
7	$5\frac{5}{7}$	3	17	31	45	59	73	87	101	115	129	143	157	171	185	199	213	227	241
10	$2\frac{2}{7}$	4	18	32	46	60	74	88	102	116	130	144	158	172	186	200	214	228	242
12	$6\frac{6}{7}$	5	19	33	47	61	75	89	103	117	131	145	159	173	187	201	215	229	243
15	$3\frac{3}{7}$	6	20	34	48	62	76	90	104	118	132	146	160	174	188	202	216	230	244
18	–	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	189	203	217	231	245
20	$4\frac{4}{7}$	8	22	36	50	64	78	92	106	120	134	148	162	176	190	204	218	232	246
23	$1\frac{1}{7}$	9	23	37	51	65	79	93	107	121	135	149	163	177	191	205	219	233	247
25	$5\frac{5}{7}$	10	24	38	52	66	80	94	108	122	136	150	164	178	192	206	220	234	248
28	$2\frac{2}{7}$	11	25	39	53	67	81	95	109	123	137	151	165	179	193	207	221	235	249
30	$6\frac{6}{7}$	12	26	40	54	68	82	96	110	124	138	152	166	180	194	208	222	236	250
33	$3\frac{3}{7}$	13	27	41	55	69	83	97	111	125	139	153	167	181	195	209	223	237	251

Tabelle, zur Verwandlung des Goldes in Hannöverisch Kassengeld.

Groschen.	Pfennige.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255
2	$3\frac{1}{5}$	1	16	31	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181	196	211	226	241	256
4	$6\frac{2}{5}$	2	17	32	47	62	77	92	107	122	137	152	167	182	197	212	227	242	257
7	$1\frac{3}{5}$	3	18	33	48	63	78	93	108	123	138	153	168	183	198	213	228	243	258
9	$6\frac{2}{5}$	4	19	34	49	64	79	94	109	124	139	154	169	184	199	214	229	244	259
12	–	5	20	35	50	65	80	95	110	125	140	155	170	185	200	215	230	245	260
14	$3\frac{1}{5}$	6	21	36	51	66	81	96	111	126	141	156	171	186	201	216	231	246	261
16	$4\frac{4}{5}$	7	22	37	52	67	82	97	112	127	142	157	172	187	202	217	232	247	262
19	$1\frac{3}{5}$	8	23	38	53	68	83	98	113	128	143	158	173	188	203	218	233	248	263
21	$4\frac{4}{5}$	9	24	39	54	69	84	99	114	129	144	159	174	189	204	219	234	249	264
24	–	10	25	40	55	70	85	100	115	130	145	160	175	190	205	220	235	250	265
26	$3\frac{1}{5}$	11	26	41	56	71	86	101	116	131	146	161	176	191	206	221	236	251	266
28	$6\frac{2}{5}$	12	27	42	57	72	87	102	117	132	147	162	177	192	207	222	237	252	267
31	$1\frac{3}{5}$	13	28	43	58	73	88	103	118	133	148	163	178	193	208	223	238	253	268
33	$4\frac{4}{5}$	14	29	44	59	74	89	104	119	134	149	164	179	194	209	224	239	254	269

§. 113.

Der Platz erlaubt hier nicht, diesen Tabellen eine größere Ausdehnung zu geben, ein jeder wird überdieß bey einer geringen Aufmerksamkeit von selbst einsehen, daß er solche beliebig erweitern kann. Jetzt will ich den Gebrauch davon zeigen.

Diese Tafeln enthalten weit mehr, als der erste Anblick versprechen mag, sie sind zugleich auch allgemeine Multiplikations- und Divisionstafeln, die erste für die Zahl 14, die andere für 15. Soll ich z. B. 7359 mit 14 multipliziren, so suche ich nach und nach die Ziffern des Multiplikandus, so wie sie von der Rechten zur linken auf einander folgen, in der obersten Horizontalreihe auf, und die Rechnung stehet so: $\frac{7359}{103026}$. Ich suche nämlich zuerst 9 auf, unter dieser 9 stehet 126; von dieser Zahl schreibe ich die Einer unter der 9; die Zehner (12) suche ich in der ersten Vertikalreihe linker Hand, neben der Groschen- und Pfennige-Columne, und die zweyte Ziffer des Multiplikandus (5) suche ich wieder in der obersten Horizontalreihe; der Vertikal- und Horizontaldurchschnitt dieser beyden Zahlen giebt die Zahl 82, von dieser schreibe ich wieder die Einer (2) unter die Ziffer des Multiplikandus (5), und die Zehner (8) suche ich wieder in der ersten Vertikalreihe, so wie die Ziffer des Multiplikandus (3), in der obersten Horizontalreihe auf, und finde wieder 50, die Null schreibe ich unter 3, die 5 wird wieder in der Vertikal-, und 7 in der Horizontalreihe aufgesucht, giebt 103, die ich, da 7 die letzte Ziffer des Multiplikandus war, ganz unter 7 hingeschrieben, und also wäre $14 . 7359 = 103026$. Eben so würde man mit 15 mittelst der andern Tabelle multipliziren; ich rathe es nur einigemal zu thun, und man wird sich leicht eine Fertigkeit in dieser mechanischen Operation erwerben.

Soll

Soll ich 103026 mit 14 dividiren, so suche man, da 10 kleiner als der Divisor ist, 103 in der Tabelle auf, so stehet allemal in der obersten Horizontalreihe der Quotient (7) und in der ersten Vertikalreihe der Rest (5), zu diesem Rest setze ich die nächstfolgende Ziffer des Dividendus (0), und suche nun 50 auf, (nur nie in der obersten Horizontalreihe), so finde ich den Quotienten 3 und den Rest 8. Zu diesem Rest nehme ich wiederum die nun folgende Ziffer des Dividendus (2), und suche nun 82 auf, finde den Quotus 5 und Rest 12, nun suche ich endlich 126 auf und finde den Quotus 9 und den Rest 0. Folglich ist $\frac{103026}{14} = 7359$, wie es seyn muß.

Die Geduld, die ein Anfänger haben muß, wenn er zum ersten Male nach diesen Tabellen rechnen soll, kömmt in keine Vergleichung mit dem Vergnügen, welches er nachher empfinden wird.

§. 114.

Wie viel betragen 235 Rthlr. Kassengeld in Golde?

Man suche 235 in der ersten Tabelle auf, (sie hat zur Ueberschrift: „Tabelle zur Verwandlung des Hannöverischen Kassengeldes in Gold"), so findet sich in der obersten Horizontalreihe 16 Rthlr. und in der ersten Vertikalreihe stehet neben dem Rest 11, 28 gr. $2\frac{2}{7}$ pf.

Diese 16 Rthlr. 28 gr. $2\frac{2}{7}$ pf. addire man zu 235 Rthlr., so erhält man das Gesuchte.

Nämlich: 235 Rthlr.
16 Rthlr. 28 gr. $2\frac{2}{7}$ pf.

Facit: 251 Rthlr. 23 gr. $2\frac{2}{7}$ pf. Gold.

Wie

Wie viel betragen 266 rthlr. Gold in Kassengeld?

Suche in der Tabelle, welche zur Ueberschrift hat: „Tabelle zur Verwandlung des Goldes in Hannöverisch Kassengeld," die Zahl 266 auf, (nur nie in der obersten Horizontalreihe, welches auch bey dem vorigen Exempel beobachtet werden muß), so findest du in der obersten Horizontalreihe 17 Rthlr., und neben dem Reste 11 in der ersten Vertikalreihe 26 gr. $3\frac{1}{5}$ pf.

Diese 17 Rthlr. 26 gr. $3\frac{1}{5}$ pf. ziehe von 266 Rthl. ab, so hast du das Gesuchte.

Also: 266 Rthlr.
17 Rthlr. 26 gr. $3\frac{1}{5}$ pf.

Facit: 248 Rthlr. 9 gr. $4\frac{4}{5}$ pf. Kassengeld.

Bey diesen Exempeln haben wir also nur eine simple Addition und Subtraktion nöthig, die nöthige Division mit 14 und 15 ersparen uns unsere Tabellen, und dieses ist, denke ich, eine der wichtigsten Ersparnisse; mehr thun ja hiebey selbst die Logarithmen nicht, deren Aufsuchen weit beschwerlicher ist, und zuletzt müßte man doch noch, wenn das Resultat in Groschen und Pfennigen verlangt wird, den Decimalbruch von den Rthlr. in Groschen und Pfennige verwandeln. Dieses letztere erspart uns aber unsere Tabelle auch, zu geschweigen, daß sie uns noch eine Menge anderer Vortheile darbietet, die nie die Logarithmen in diesem Grade gewähren können. Diese Tabellen beantworten auch folgende Fragen:

1 Stück kostet 2 Mgr. $4\frac{4}{7}$ pf., wie viel kosten 159 Stück?

Suche 159, wie vorhin, in der ersten Tabelle auf, und du findest: 11 Rthlr. 12 Mgr. $6\frac{6}{7}$ pf.

1 Stück

1 Stück kostet 2 Mgr. $3\frac{1}{5}$ pf., wie viel kosten 231 Stück?

Suche, wie vorhin, 231 in der zweyten Tabelle auf, so erhälst du sogleich 15 Rthlr. 14 Mgr. $3\frac{1}{5}$ Pf.

Wie viel machen 14mal 17 rthlr. 23 Mgr. $1\frac{1}{7}$ pf.?

Suche in der obersten Horizontalreihe der ersten Tabelle 17 Rthlr., in den ersten zwey Vertikalreihen linker Hand aber die 23 Mgr. $1\frac{1}{7}$ pf. auf, so findest du das richtige Resultat in dem Durchschnitt der Horizontal- und Vertikalkolumnen: nämlich 247 Rthlr.

Wie viel beträgt 15mal 13 Rthlr. 19 Mgr. $2\frac{3}{5}$ pf.?

Suche in der zweyten Tabelle, wie vorhin, so findet sich das Resultat = 203 Rthlr.

§. 115.

Damit man doch einigermaaßen die Menge der Aufgaben übersehen mag, die mittelst dieser Tabellen unmittelbar aufgelöst werden können, so will ich sie aufzählen.

a) Die erste Tabelle giebt unmittelbar, so weit wie ich sie hier konstruirt habe, sogleich alle Produkte des Multiplikators 14, von 0 bis 17. Z. B. 14 . 13 = 105. Mittelbar aber alle Produkte des Multiplikators 14 in jeder beliebigen Zahl, wie §. 113 gezeigt worden.

Alles dieses leistet auch die andere Tabelle für den Multiplikator 15.

b)

b) Die erste Tabelle giebt für den Divisor 14 unmittelbar sogleich alle Quotienten und die dazu gehörigen Reste aller Zahlen, von 0 bis 251.; mittelbar aber alle Quotienten und Reste des Divisors 14 in jeder beliebigen Zahl, wie solches §. 113. gezeigt worden.

Das letztere leistet auch die andere Tabelle für den Divisor 15, sonst giebt sie im ersten Fall unmittelbar sogleich alle Quotienten und Reste der Zahlen von 0 bis 269.

c) Die erste Tabelle beantwortet unmittelbar die Fragen von 0 bis 251 Stück à 2 Mgr. $4\frac{4}{7}$ pf.; mittelbar aber alle mögliche Fragen dieser Art., das Stück zu 2 Mgr. $4\frac{4}{7}$ pf. gerechnet.

Eben dieses leistet unmittelbar die zweyte Tabelle, von 0 bis 269 Stück à 2 Mgr. $3\frac{1}{5}$ pf.; mittelbar aber beantwortet sie wiederum alle mögliche Fragen dieser Art.

d) Von der Verwandlung des Kassengeldes in Gold, und umgekehrt, beantwortet die erste Tabelle unmittelbar 251, und die zweyte Tabelle 269 Aufgaben, nämlich so, daß hier nur eine simple Addition oder Subtraktion geschiehet; mittelbar aber beantworten sie alle mögliche Fragen dieser Art, uns bleibt nur eine Addition oder Subtraktion zu verrichten übrig.

e) Dergleichen Fragen, als die zwey letzten des vorhergehenden §. sind, beantwortet die erste Tabelle unmittelbar 251, und die zweyte Tabelle 269; mittelbar alle.

Es wäre mir leicht, noch mehrere Fälle aufzusuchen, wo sie Genüge leisten; allein ich will es hierbey bewen-

bewenden lassen, da diese aufgezählten schon 2114 Aufgaben geben, die unmittelbar aufgelöst werden können.

Die Zahl der mittelbar aufzulösenden Aufgaben ist unzählbar — und alles dieses befindet sich auf so einem kleinen Raum; die Konstruktion selbst ist so einfach, daß, wer diese Tabellen nur einmal sihet, sie auch gewiß sogleich aus dem Kopfe nachschreiben kann.

Den größten Nutzen haben diese Tabellen als allgemeine Multiplikations- und Divisions-Tabellen der Zahlen 14 und 15. Wer auch nicht Mathematiker ist, wird schon ahnden, wie er für jede beliebige Zahl sich dergleichen Tabellen entwerfen kann. Meine Rechenmaschine, die vielleicht vielen meiner Leser schon bekannt ist, enthält solche allgemeine Multiplikations- und Divisions-Tabellen für alle einfache Zahlen unsers Zahlensystems. — Nächstens sollen von mir dergleichen Tabellen für unser, und auch für andere Zahlensysteme sehr vollständig, nebst ihrer Theorie, erscheinen. — Hierdurch werde ich gewiß den Mathematikern, und überhaupt jedem Rechner einen großen Dienst leisten, und viele werden einsehen lernen, daß man meine Rechenmaschine bisher gar nicht aus dem rechten Gesichtspunkte angesehen hat, — da doch in ihr das ganze Geheimniß der Konstruktion liegt. Diese allgemeine Multiplikations- und Divisionstabellen sind seit 1798. unter dem Titel: „Pinamteck," bey Lagarde in Berlin, erschienen, und mit typographischer Schönheit gedruckt. — Wer sich diese Tafeln auf Pappe zieht, wird die Bequemlichkeit des Gebrauchs sehr vermehren, da aber hiezu zwey Exemplare nöthig sind, so hat der Hr. Verleger sich erklärt, daß er jedem, der sich unmittelbar an ihn wendet, gegen baare Bezahlung jedes Exemplar für die Hälfte des Ladenpreises, also beyde Exemplare für 3 rthlr. lassen will. Es wird gewiß

keinen gereuen, sich mit der Pinamteck näher bekannt zu machen. In kurzem werden wieder von meinen Erfindungen mathematische Hülfstafeln erscheinen, die sich, so wie die Pinamteck, durch Simplizität empfehlen werden.

(Die Fortsetzung im nächsten Theil.)

Samm-

Sammlung algebraischer Aufgaben.

In dem ersten Theile dieses Werks haben wir nur eine Bezeichnung unbekannter Größen angenommen; und dadurch, daß wir die Bedingungen, welche die gesuchten Größen eine durch die andere bestimmen, bey ihren Benennungen gebrauchten, uns auf ein einziges willkührliches Zeichen eingeschränkt. Ueberlegt man sorgfältig die Einrichtung der Benennungen, so kann man oft die Anzahl der unbekannten Zeichen vermindern. Es geschieht aber auch oft, daß, wenn man zu sehr auf diese Verminderung bestehen will, das Verfahren, statt einfacher zu werden, verwickelter wird, und gleich Anfangs auf gebrochene Größen oder andere zusammengesetzte Ausdrücke führt, die man hätte vermeiden können. Es ist mehr von Wichtigkeit, sich an die Auflösung solcher Aufgaben zu gewöhnen, welche mehrere Zeichen unbekannter Größen erfordern; oder auch selbst solche Aufgaben auf diese Art zu behandeln, bey welchen sie nicht durchaus nothwendig ist.

1te Aufgabe.

Eine Pfanne fasset 18 Eimer. In die Pfanne und den Eimer gehen zusammen 570 Maaß. Wie viel Maaß fasset die Pfanne, und wie viel der Eimer?

Auflösung.

Der Eimer enthält x Maaß;
die Pfanne $y = 18x$

Da nun nach der Aufgabe { I. $y = 18x$ und II $x + y = 570$,

so ist auch $19x = 570$

folglich $x = 30$ } Maaß.
und $y = 540$ }

Arithmetische Auflösung.

Es fällt sogleich in die Augen, daß Pfanne und Eimer zusammen 19 mal so viel Maaß, als der Eimer enthalten. Daher der Eimer $\frac{570}{19} = 30$ Maaß enthalten muß.

2te Aufgabe.

Einer hat zwey Beutel mit Geld, legt er in den ersten noch 10 rthlr., so enthält er noch einmal so viel Thaler, als der andere; legt er aber diese 10 rthlr. in den andern, so sind in beyden gleich viel Thaler.

Auflösung.

In dem einen Beutel seyen = x rthlr.
In dem andern = = = y —
so ist nach der Aufgabe I. $x + 10 = 2y$
II. $x = y + 10$
No. II. von No. I. abgezogen, giebt $10 = y - 10$
folglich $y = 20$ rthlr.
und $x = 30$ rthlr.

Arithmetische Auflösung.

Da der eine Beutel bereits so viel als der andere und noch 10 rthlr. enthält, so enthält er, wenn noch

10 rthlr. zugelegt werden, so viel als der andere und noch 20 rthlr.; da dieses nun gerade das Doppelte von dem Inhalte des andern seyn soll, so muß dieser gerade 20 rthlr. enthalten.

3te Aufgabe.

Man soll zwey Zahlen errathen, von denen man folgendes weiß: addirt man zu der ersten a hinzu, so ist sie m mal so groß, als die andre; addirt man hingegen a zu der 2ten, so sind beyde gleich groß.

Auflösung.

Es sey die eine der gesuchten Zahlen $= x$
die andere " " $= y$

so ist

$$\text{I. } x + a = m \cdot y$$
$$\text{II. } x = y + a$$

also $a = (m-1)y - a$

folglich $y = \frac{2a}{m-1}$

und $x = \frac{2a}{m-1} + a = \frac{2a + ma - a}{m-1} = \frac{(m+1)a}{m-1}$

In der nächst vorhergehenden Aufgabe war

$a = 10$, $m = 2$ folgl. $y = \frac{2 \cdot 10}{2-1} = 20$

und $x = \frac{(2+1) \cdot 10}{m-1} = 30.$

4te Aufgabe.

Einer spricht zum andern: Hätte ich 10 rthlr. mehr als ich habe, so hätte ich so viel als

Du.

du. Der andre spricht: Hätte ich 15 rthlr. mehr, als ich habe, so hätte ich doppelt so viel, als du. Wie viel Thaler hatte ein Jeder?

Auflösung.

A habe x und B habe y rthlr.

so ist I. $x + 10 = y$

und II. $2x = y + 15$

No. I. von No. II. abgezogen, giebt

$x - 10 = 15$

folglich $x = 25$
und $y = 35$ } rthlr.

Arithmetische Auflösung.

Wenn der, der schon 10 rthlr. mehr als der andere hat, noch 15 rthlr. dazu bekommt, so hat er 25 rthlr. mehr, und da er alsdann gerade doppelt so viel als der andere hat, so muß der andere 25 rthlr. gehabt haben, und der erste 35 rthlr.

5te Aufgabe.

In einer Familie waren mehrere Kinder. Auf die Frage, wie groß die Zahl sey? antwortete der älteste Sohn: Ich habe so viel Schwestern, als Brüder; die älteste Tochter aber sagte: ich habe nur halb so viel Schwestern, als Brüder. Hieraus konnte der Fragende leicht die Zahl der Kinder berechnen.

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Brüder $= x$
die der Schwestern $= y$

Daher

Daher die Anzahl der Brüder des ältern Sohnes
$= x - 1$
und die der Schwestern der ältern Tochter
$= y - 1$

Demnach

I. $x - 1 = y$
und II. $x = 2(y-1) = 2y - 2$

No. I. von No. II. abgezogen, giebt

$1 = y - 2$
folgl. $y = 3$
und $x = 4$

6te Aufgabe.

Zwey Brüder aßen zusammen Eyer, der Eine sagte: giebst du mir zwey von deinen, so habe ich so viel als du. Der Andre antwortete: giebst du mir zwey von deinen, so habe ich noch einmal so viel als du. Wie viel hat ein Jeder gehabt?

Auflösung.

A habe x Eyer. B habe y Eyer.

Erhält A von B zwey Eyer: so hat jener $x + 2$, dieser $y - 2$ } Eyer,

und es ist nach der Aufgabe

I. $x + 2 = y - 2$

Erhält B von A zwey Eyer: so hat jener $y + 2$, dieser $x - 2$ } Eyer,

und es ist nach der Aufgabe

II. $2(x-2) = y + 2$.

Zieht man No. I. von No. II. ab: so entsteht

$x - 6 = 4$
folgl. $x = 10$

Diesen

Diesen Werth von x in No. I. gesetzt, giebt

$$10 + 2 = y - 2$$

Woraus $y = 14$.

7te Aufgabe.

Es sey alles wie zuvor, nur gebe jeder dem andern a Eyer;

so ist

$$\text{I.} \quad x + a = y - a$$
$$\text{II.} \quad 2(x - a) = y + a$$

Demnach $x - 3a = 2a$

folgl. $x = 5a$

Diesen Werth in I gesetzt, giebt

$$6a = y - a$$

Also $y = 7a$

8te Aufgabe.

A sagt zu B: gieb mir c von deinen Eyern, so habe ich m mal so viel, als du.

B sagt zu A: gieb mir d Eyer, so habe ich n mal so viel, als du. Wie viel hat ein jeder?

Auflösung.

A habe x und B habe y Eyer.

Daher I. $x + c = m(y - c) = my - mc$

und II. $y + d = n(x - d) = nx - nd$ — mit m multipl.

giebt $my + md = m.nx - m.nd$

No. I. giebt $my - mc = x + c$ subtrah.

$$m(d + c) = (m.n - 1)x - m.nd - c$$

folgl.

folgl. $x = \frac{md(n+1)+(m+1).c}{m.n-1}$

und $y = \frac{d(n+1)+(m+1).nc}{m.n-1}$

Zusatz.

Wenn $m = n$, so haben wir

$x = \frac{(md+c)(m+1)}{m^2-1} = \frac{md+c}{m-1}$

und $y = \frac{d+mc}{m-1}$

9te Aufgabe.

Man hat einige Pfunde Waaren; verkauft man 1 Pfund für $4\frac{7}{8}$ rthlr., so verliert man auf alle Pfunde $2\frac{1}{2}$ rthlr.; verkauft man 1 Pfund für 5 rthlr., so gewinnt man auf alle Pfunde 10 rthlr. Wie viel Pfunde hat man, und wie viel beträgt der ganze Einkaufspreis?

Auflösung.

Die Anzahl der Pfunde sey $= x$
der Einkaufspreis des Ganzen $= y$

Daher I. $4\frac{7}{8}.x = y - 2\frac{1}{2}$
und II. $5.x = y + 10$

No. II. weniger No. I. giebt $\frac{x}{8} = 12\frac{1}{2}$
folgl. $x = 100$ Pfunde
und $y = 490$ rthlr.

10te Aufgabe.

Ein Goldschmidt sagte von einer silbernen Schaale, wenn sie noch einmal so viel, halb, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{7}$

$\frac{1}{6}$ so viel wöge, als sie wiegt, und noch 12 Loth dazu, so wöge sie eben so viel über 100 Loth, als sie jetzt darunter wiegt. Wie schwer war die Schaale?

Auflösung.

Wenn das Gewicht der Schaale x Loth, und das, was sie unter den in der Aufgabe angegebenen Umständen über oder unter 100 Loth wiegt, y Loth: so ist

I. $2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x + 12 = y + 100$

und II. $x = 100 - y$ addirt

$3x + \frac{11}{12}x + 12 = 200$

$\frac{47x}{12} = 188$

$x = \frac{188.12}{47} = 4.12 = 48$ Loth.

11te Aufgabe.

Wie alt bist du? fragte ein Sohn seinen Vater. Die Antwort war: Es sind schon 7 Jahre, da ich gerade 3mal so alt war, als du damals warest, und in 7 Jahren werde ich doppelt so alt seyn, als du alsdann seyn wirst. Wie alt war der Vater?

Auflösung.

Wenn das gegenwärtige Alter des Vaters $= x$ Jahre

das des Sohnes $= y$ —

so war vor 7 Jahren das Alter des Vaters $= x - 7$

und nach 7 Jahren $= x + 7$

Vor 7 Jahren war das Alter des Sohnes $= y - 7$

und nach 7 Jahren $= y + 7$

Daher I. $x - 7 = 3(y - 7) = 3y - 21$

II. $x + 7 = 2(y + 7) = 2y + 14$

No II. weniger No. I., giebt $14 = -y + 14 + 21$

folgl. $y = 21$

Aus No. II. folgt $x = 2.21 + 7 = 49$.

12te Aufgabe.

Einer wollte ein Landgut um baares Geld kaufen, hatte aber sein Vermögen in Kapitalien stehen, deswegen wollte er jedem seiner Schuldner etwas aufkündigen, damit er sein übriges Vermögen bey seinen guten Schuldnern vertheilt behielte. Wenn er nun jedem 200 rthlr. aufkündigt, so hat er 700 rthlr. zu viel; und, wenn er jedem 150 rthlr. aufkündigt, so hat er 1100 rthlr. zu wenig. Nun ist die Frage, wie viel er jedem aufkündigen müsse, daß er weder zu viel, noch zu wenig zu diesem Kaufschillinge habe.

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Schuldner $= x$

Das Kaufgeld des Landgutes $= y$

also das, was er jedem aufkündigen muß $= \frac{y}{x}$

daher $200x - 700 = y$

und $150x + 1100 = y$

also $50x - 1800 = 0$; folgl. $x = 36$ Schuldner

$y = 6500$; $\frac{y}{x} = 180\frac{5}{9}$.

13te Aufgabe.

Zwey Spieler, A und B, geben einem Armen von ihrem gemachten Gewinn. A gab ihm $\frac{1}{5}$,

B $\frac{1}{7}$ seines Gewinnstes; darauf fand sich, daß der Arme 20 rthlr. bekommen hatte, und jeder Spieler behielt gleich viel. Wie viel mag jeder der Spieler gewonnen haben?

Auflösung.

A hatte $5x$ rthlr. gewonnen
und B $7y$ rthlr. —
A gab den Armen x rthlr., behielt also $4x$ rthlr.
B " " y rthlr., " " $6y$ —
Daher nach der Aufgabe I. $x + y = 20$ und
II. $4x + 6y = 0$
4 mal No. I. weniger No. II., giebt
$10y = 80$
also $y = 8$
folgl. $7y = 56$ rthlr.; so viel hat nämlich B gewonnen.

Aus No. I. haben wir $x = 20 - y = 20 - 8 = 12$.
folgl. $5x = 60$ rthlr.; so viel hat A gewonnen.

Allgemeine Auflösung.

A hatte mx gewonnen, gab weg x, behielt $(m-1)x$
B " ny " , " " y, " $(n-1)y$

Nun sey I. $x + y = a$
und II. $(m-1)x - (n-1)y = 0$
$(m-1)$ mal No. I. weniger No. II., giebt
$[(m-1) + (n-1)] \cdot y = (m-1)a$

$$\text{also } y = \frac{(m-1) \cdot a}{m+n-2}$$

$$\text{folgl. } ny = \frac{n(m-1) \cdot a}{m+n-2}$$

$$\text{Aus No. I. findet man } mx = \frac{m(n-1) \cdot a}{m+n-2}$$

14te Aufgabe.

Es giebt einen Bruch; wenn man m vom Zähler nimmt, so wird er $\frac{a}{b}$, und wenn man n vom Nenner nimmt, so wird er $\frac{c}{d}$. Welches ist der Bruch?

Auflösung.

Es sey $\frac{x}{y}$ der Bruch; so ist nach der Aufgabe

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } \frac{x-m}{y} = \frac{a}{b} \text{ und} \\ \text{II. } \frac{x}{y-n} = \frac{c}{d} \end{array}\right\} \text{also} \left\{\begin{array}{l} \text{III. } bx - bm = a \cdot y \text{ und} \\ \text{IV. } dx = cy - cn \end{array}\right.$$

No. III mit c, und No IV. mit a multiplizirt und das letzte Produkt vom erstern abgezogen, giebt

$$(bc - ad)\,x - bcm = acn$$

$$\text{folgl. } x = \frac{(an + bm)\,c}{bc - ad}$$

Multiplizirt man ferner No. III. mit d und No. IV. b, zieht das erste Produkt vom letztern ab, so kommt

$$bdm = (bc - ad)\,y - bcn$$

$$\text{folgl. } y = \frac{(cn + dm)\,b}{bc - ad}$$

$$\text{demnach } \frac{x}{y} = \frac{(an + bm) \cdot c}{(cn + dm) \cdot b}$$

Wenn $n = m$ und $a = c$ so wird

$$\frac{x}{y} = \frac{(a+b)\,a}{(a+d)\,b}$$

Es sey $a = c = m = n = 1$.

$b = 4$ und $d = 3$

so ist $\frac{x}{y} = \frac{5}{15}$

15te Aufgabe.

Drey Scheffel Hafer und fünf Scheffel Erdtoffeln haben zusammen in wohlfeilen Zeiten 83 Groschen, und wieder 3 Scheffel von dem nämlichen Hafer und 7 Scheffel der nämlichen Erdtoffeln 97 Groschen gekostet, was kostet der Scheffel von jedem?

Durch Raisonnement.

Die Vorausetzung, daß man beydemal ebensoviel Scheffel Hafer gekauft habe, erleichtert die Auflösung sehr.

Der Unterschied 14 der zwey Preise 97 und 83 ist der Preis des Unterschiedes der von den Erdtoffeln gekauften Scheffeln, nämlich der Preis von 2. Ein Scheffel Erdtoffeln kostet also 7 Groschen, und 5 Scheffel kosten 35 gr.: 3 Scheffel Hafer kosten 83 — 35 = 48 gr.; und 1 Scheffel Hafer kostet 16 gr.

Preis von	3	Scheffel Hafer	=	48 gr.
=	= 7	= Erdtoffeln	=	49 —
Totalpreis	=	=	=	97 —

Das algebraische Verfahren ist nur eine symbolische Darstellung des vorigen.

Benennung.

Preis eines	Scheffels	Hafer	=	x
=	=	= Erdtoffeln	=	y

Preis von	3	Scheffel Hafer	=	3x
=	= 5	= Erdtoffeln	=	5y
=	= 7	=	=	7y

Bedeu-

Bedeutung.	Reduktion.
$3x + 5y = 83$ $3x + 7y = 97$	Die obere Gleichung von der untern abgezogen
giebt $2y = 14$	
folgl. $y = 7$ gr.	

Aus $3x + 5y = 83$

folgt $x = \frac{83 - 5y}{3} = \frac{83 - 35}{3} = \frac{48}{3} = 16$ gr.

Auflösung.

$x = 16$ gr.; $y = 7$ gr.

$3x = 48$; $5y = 35$; $7y = 49$.

Probe.

$48 + 35 = 83$

$48 + 49 = 97$

Es wäre leicht gewesen, sich hiebey nur eines unbekannten Zeichens, z. B. für den Preis eines Scheffels Erdtoffeln zu bedienen.

Benennung.

Preis eines Scheffels Erdtoffeln = y

= von 5 Scheffel = = = 5y

= = 7 = = = = 7y

= = 3 = Hafer = $\begin{cases} 83 - 5y \\ 97 - 7y \end{cases}$

Bed. $83 - 5y = 97 - 7y$

Red. $83 + 2y = 97$

$2y = 14$

$y = 7$ gr., wie vorhin.

Auflösung.

$y = 7$ gr., Preis eines Scheffels Erdtoffeln.

$5y = 35$ gr., = von 5 Scheffel =

$7y = 49$ gr., = = 7 =

$83 - 5y = 48$
$97 - 7y = 48$ } Preis von 3 Scheffel Hafer.

16te Aufgabe.

Man hat eine gewisse Anzahl Aepfelbäume, zu 15 gr. das Stück; und eine gewisse Anzahl Birnbäume, zu 8 gr. das Stück, gekauft. Ein andermal hat man die nämliche Anzahl Aepfelbäume zu dem nämlichen Preis, und auch wieder die nämliche Anzahl Birnbäume, zu 6 gr. das Stück, gekauft. Das erstemal hat man 147 gr., und das anderemal 129 gr. bezahlt. Wie viel waren es Aepfel- und wie viel Birnbäume?

Antwort.

5 Aepfel- und 9 Birnbäume.

17te Aufgabe.

Man stellt eine gewisse Anzahl Arbeiter an, nämlich 12 Männer und 8 Weiber, und bezahlt ihnen während 30 Tagen zusammen 328 rthlr. Ein andermal stellt man 12 Männer und 11 Weiber um den nämlichen Lohn an, und bezahlt ihnen in eben der Zeit zusammen 370 rthlr. Wie viel bezahlte man jedem Mann und jedem Weibe?

Antwort.

Jede Frau bekömmt 14 rthlr. und jeder Mann 18 rthlr.

18te Aufgabe.

Jemand hat 15 Ellen Tuch verkauft und dafür 120 rthlr. und 10 Ellen von einem andern Tuch bekommen.
Ein anderes Mal hat er für 15 Ellen des ersten Tuchs 150 rthlr. und 8 Ellen von dem andern Tuch bekommen. Was sind die Preise einer Elle von jeder der beyden Sorten Tuch?

Antwort.

Jede Elle der ersten Sorte kostet 18 rthlr.
" " " 2ten " " 15 —

19te Aufgabe.

Ein Schreiber erspart 12 gr. jeden Tag, an dem er arbeitet, und verzehrt 5 gr. jeden Tag, an dem er nicht arbeitet. Nach Verlauf einer gewissen Zeit hat er 238 gr. gewonnen. Ein anderes Mal hat er eben so viel Tage gearbeitet, und eben so viel täglich erspart, als das erste Mal; auch ist er eben so viel Tage als das erste Mal müssig gegangen, hat aber nun täglich 8 gr. verzehrt: und so hat er in der nämlichen Zeit nur 208 gr. gewonnen. Wie viel Tage hat er jedes Mal gearbeitet; und wie viel nicht?

Antwort.

24 Tage hat er gearbeitet, und 10 Tage ist er müssig gewesen.

20ste Aufgabe.

Ein Künstler erspart jeden Tag, an dem er arbeitet, 14 gr., und giebt jeden Tag, an dem er nicht arbeitet, 8 gr. aus. Nach Verlauf einiger Zeit hat er 324 gr. erspart. Ein anderes Mal hat er 3 Tage weniger, mit der nämlichen täglichen Ersparniß, gearbeitet, ist dagegen drey Tage mehr müßig gegangen, wobey er täglich 10 gr. statt 8 ausgegeben: und nun hat er nur 228 gr. erspart. Wie viel Tage hat er jedes Mal gearbeitet; und wie viel ist er müßig gegangen?

Antwort.

50$\frac{4}{7}$ Tage gearbeitet und 48 Tage müßig gegangen.

---

21. Allgemeine Aufgabe.

Man soll zwey Zahlen finden, die so beschaffen sind, daß das a fache des einen Plus dem b fachen des andern gleich c; ferner das a fache der ersten mit dem b′ fachen der zweyten gleich c′ sey. Welches sind die Zahlen?

Ben. Die gesuchte Zahlen seyen x und y

Bed. $\begin{cases} ax + by = c \\ ax + b'y = c' \end{cases}$

Ist nun $b > b'$, so ziehe man die 2te Gleichung von der ersten ab, und man erhält:

$(b-b')\ y = c - c'$, folgl.

$$y = \frac{c - c'}{b - b'}, \text{ also}$$

$by =$

$$by = \frac{b(c-c')}{b-b'}\ ;\quad ax = c - by = c - \frac{b(c-c')}{b-b'} =$$

$$\frac{b.c' - b'.c}{b-b'}$$

$$b'y = \frac{b'(c-c')}{b-b'};\quad ax = c' - b'y = c' - b'\frac{(c-c')}{b-b'}$$

$$= \frac{bc' - b'c}{b-b'}$$

Auflösung.

$$x = \frac{bc' - b'c}{a(b-b')} \text{ und } y = \frac{c-c'}{b-b'}$$

Probe.

$$\begin{cases} ax + by = \frac{bc' - b'c}{b-b'} + \frac{b(c-c')}{b-b'} = \frac{c(b-b')}{b-b'} = c \\ ax + b'y = \frac{bc' - b'c}{b-b'} + \frac{b'(c-c')}{b-b'} = \frac{c'(b-b')}{b-b'} = c' \end{cases}$$

Anmerk. Wendet man dieſe Formeln auf den Fall $b = b'$ an; ſo findet man $y = \frac{c-c'}{0} = \infty$; und dieſer Ausdruck bedeutet Unmöglichkeit der Aufgabe, wofern nicht zugleich $c = c'$; woraus $y = \frac{0}{0}$, oder unbeſtimmt, folgt; denn aus beyden Bedingungen wird alsdann nur eine, und die Aufgabe wäre unbeſtimmt.

Den Fall $b' \gtrless b$ betreffend, würde man die Auflöſung unmittelbar erhalten, wenn man die Glieder der erſten Gleichung von denen der zweyten abzöge; oder die Zeichen der Glieder der Brüche, welche die

Werthe der unbekannten Größen angeben, änderte.

So werden nun $y = \frac{c' - c}{b' - b}$; $x = \frac{b'c - bc'}{a(b' - b)}$.

Unter der Voraussetzung $b > b'$, ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst, wenn $c > c'$ und $bc' > b'c$ sind. Ist aber $c' > c$; so verändert sich das Zeichen des Werths von y, und die zwey Gleichungen der Bedingungen verwandeln sich in diese: $ax - by = c$; $ax - b'y = c'$. Wenn bey der nämlichen Voraussetzung, daß $b > b'$ sey, $b'c > bc'$ ist; so verändert sich das Zeichen des Werths von x; und die Gleichungen der Bedingungen werden

$$\begin{cases} by - ax = c \\ b'y - ax = c'. \end{cases}$$

Die folgenden Beispiele dienen, diese allgemeine Formeln zu erläutern.

1tes Beyspiel.

In der 16ten Aufgabe ist $a = 15$ gr. | $b' = 6$
$b = 8$ | $c' = 129$
$c = 147$ |

also $y = \frac{147 - 129}{8 - 6} = \frac{18}{2} = 9$ Birnbäume

und $x = \frac{8 \cdot 129 - 6 \cdot 147}{15 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 43 - 147}{15} = \frac{172 - 147}{5}$

$= \frac{25}{5} = 5$ Aepfelbäume.

2tes Beyspiel.

In der 17ten Aufgabe ist $a = 12$ | $b' = 11$
$b = 8$ | $c' = 370$
$c = 328$ |

Da hier $b' > b$ und $c' > c$, so bediene ich mich der Formeln

$y =$

$$y = \frac{c' - c}{b' - b} \quad \text{und} \quad x = \frac{b'c - bc'}{a(b' - b)}$$

und erhalte $y = \frac{370 - 328}{11 - 8} = \frac{42}{3} = 14$ rthlr. jedem Weibe

und $x = \frac{11 \cdot 328 - 8 \cdot 370}{12 \cdot 3} = \frac{11 \cdot 82 - 2 \cdot 370}{9} =$

$\frac{902 - 740}{9} = \frac{162}{9} = 18$ rthlr. jedem Manne.

3tes Beyspiel.

Wer die Bedingungen der 18ten Aufgabe durch Gleichungen ausdrückt, wird bey der Vergleichung mit der allgemeinen sogleich übersehen, daß hier

$a = 15$	$b' = -8$
$b = -10$	$c' = 150$
$c = 120$	

Die allgemeinen Formeln, die im 2ten Beyspiele gebraucht worden sind, auch hier gebraucht werden.

Dieß giebt $y = \frac{150 - 120}{-8 + 10}$

$= \frac{30}{2} = 15$ rthlr. jede Elle der 2ten Sorte Tuch.

und $x = \frac{-8 \cdot 120 + 150 \cdot 10}{15 \cdot 2} = \frac{-8 \cdot 8 + 10 \cdot 10}{2} = \frac{36}{2} =$

18 rthlr. jede Elle der 2ten Sorte Tuch.

4tes Beyspiel.

In der 19ten Aufgabe ist

$a = 12$	$b' = -8$
$b = -5$	$c' = 208$
$c = 238$	

Dieses giebt nach den ersten allgemeinen Formeln

$y = \frac{238 - 208}{-5 + 8} = \frac{30}{3} = 10$ Tage, die er müßig gewesen

und

und $x = \frac{-5.208+8.238}{12.3} = \frac{-5.52+2.238}{9} = \frac{216}{9}$

$= 24$ Tage, die er gearbeitet hat.

5tes Beyspiel.

In der 20sten Aufgabe ist $a = 14$, $b = -8$, $c = 324$ | $b' = -10$, $c' = 228$

Demnach $y = \frac{324-228}{-8+10} = \frac{96}{2} = 48$ Tage müßig gegangen.

und $x = \frac{-8.228+10.324}{14.2} = \frac{-2.228+10.81}{7}$

$= \frac{-456+810}{7} = \frac{354}{7} = 50\frac{4}{7}$ Tage, die er gearbeitet hat.

Uebrigens hätte man auch alle gegebene Beyspiele nach den zuerst gefundenen Formeln

$$y = \frac{c-c'}{b-b'} \quad \text{und} \quad x = \frac{bc'-b'c}{a(b-b')}$$

rechnen können, indem der negative Zähler, durch den negativen Nenner dividirt, doch ein positives Resultat giebt. Der Analyst rechnet also nach einer einzigen Formel alle die Aufgaben, deren Bedingungsgleichungen mit den hier gegebenen allgemeinen von einerley Form sind.

Wäre also $\begin{cases} ax-by=c \\ \text{und } ax-b'y=c' \end{cases}$, so giebt die Vergleichung mit den

Gleichungen $\begin{cases} ax+by=c \\ ax+b'y=c' \end{cases}$ sogleich $y = \frac{c-c'}{-b-(-b')}$

$= \frac{c-c'}{-b+b'}$

und

und $x = \frac{-bc' - (-b'c)}{a(-b+b')} = \frac{-bc' + b'c}{a(-b+b')}$

Wenn nun hier $b > b'$ ist, so wird $-b+b'$ negativ, aber da in diesem Falle auch $c' > c$ seyn muß, so ist auch $c - c'$ negativ und daher doch y positiv, und so, wie leicht zu sehen, ist auch x positiv, weil Zähler und Nenner negativ sind.

22ste Aufgabe.

Man hat zwey Arten von Kugeln: 6 Stück der ersten Art mit 10 Stück der zweyten Art wiegen zusammen 304 ℔; und 10 Stück von der ersten Art mit 15 von der zweyten wiegen zusammen 480 ℔. Wie viel wiegt eine Kugel von jeder Art?

Duch Raisonnement.

Nach der Angabe muß einmal: eine Kugel von der ersten Art nebst $1\frac{2}{3}$ von der andern Art zusammen $50\frac{2}{3}$ ℔. wiegen; und zweytens: eine Kugel von der ersten Art nebst $1\frac{1}{2}$ von der andern zusammen 48 ℔. wiegen. Hieraus ergiebt sich, daß $\frac{1}{6}$ von einer Kugel der zweyten Art, $2\frac{2}{3}$ ℔., und also die Kugel selbst 16 ℔. wiegt; 10 Stück dieser Art wiegen also 160 ℔. Mithin wiegen 6 Stück der ersten Art $304 - 160 = 144$ ℔., folglich wiegt eine Kugel der ersten Art $\frac{144}{6} = 24$ ℔.

Algebraische Auflösung.

Wenn man wüßte, wie viel eine Kugel von jeder Art wöge, und das Gewicht von einer Kugel ersterer Art mit 6, und das von einer Kugel der zweyten Art, durch 10 multiplizirte, und diese zwey Produkte addirte, so fände man 304 ℔. Ebenfalls, wenn

wenn man das Gewicht einer Kugel der ersten Art durch 10, das der zweyten durch 15 multiplizirte, und diese beyden Produkte wieder zusammen addirte, so fände man 480 ℔. Wäre dieses, und ich stellte durch x die Zahl der Pfunde, oder das Gewicht einer Kugel ersterer Art, und durch y das Gewicht einer Kugel der zweyten Art vor, indem ich auf eben die Art schließe, so werde ich folgende zwey Gleichungen haben.

$$6x + 10y = 304 \text{ und } 10x + 15y = 480.$$

Es kommt also nur darauf an, die Werthe von x und y zu finden. Dieserwegen suche ich in jeder Gleichung den Werth von x. Die erste Gleichung war:

$$6x + 10y = 304.$$

mit 2 dividirt.

giebt $3x + 5y = 152$

daraus $x = \frac{152 - 5y}{3}$;

Die zweyte Gleichung war:

$$10x + 15y = 480$$

mit 5 dividirt.

giebt $2x + 3y = 96$

daraus $x = \frac{96 - 3y}{2}$

mithin muß $\frac{96-3y}{2} = \frac{152-5y}{3}$ seyn; mit 6 multiplizirt

giebt $288 - 9y = 304 - 10y$

daraus $y = 16$ ℔.

und also $x = \frac{96 - 3 \cdot 16}{2} = 48 - 3 \cdot 8 = 24$ ℔.

Probe.

Probe.

Eine Kugel der ersten Art wiegt also 24 ℔., und eine Kugel der zweyten Art wiegt 16 ℔. und in der That; denn 6 Kugeln, jede zu 24 ℔., wiegen zusammen 144 ℔., welche mit 10 Kugeln, jede zu 16 ℔., oder 160 ℔. zusammen genommen, 304 ℔. wiegen. Eben so wiegen 10 Kugeln, jede zu 24 ℔., 240 ℔.; und 15 Kugeln, jede zu 16 ℔., wiegen auch 240 ℔.; also die vorigen 10 Kugeln mit diesen 15 wiegen zusammen 480 ℔. Also ganz so, wie die Angabe war.

Anmerk. Die Auflösung wird kürzer, wenn man die Gleichung $3x + 5y = 152$ mit 2, und die Gleichung $2x + 3y = 96$ mit 3 multiplizirt, und diese von jener abzieht. Die Rechnung selbst ist folgende:

$2(3x + 5y = 152)$
$3(2x + 3y = 96)$ subtrahirt giebt $y - 16$ ℔.

ferner
$5(2x + 3y = 96)$
$3(3x + 5y = 152)$ subtrahirt

giebt $x = 24$ ℔.

23ste Aufgabe.

Ein Stück Erz von 8,95 Cubikfuß, welches aus japanischem Kupfer und reinem Zinn besteht, wiegt 5531 ℔. Jeder Cubikfuß japanisches Kupfer wiegt 630 ℔., und jeder Cubikfuß Zinn wiegt 512 ℔. Wie viel Cubikfuß Kupfer und Zinn enthält also dieses Stück Erz?

Auflösung.

Es enthalte x Cubikfuß Kupfer und y Cubikfuß Zinn:

so

so muß $x + y = 8{,}95$ seyn.

folglich: $x = 8{,}95 - y$ — y subtrahirt

Ferner muß laut der Aufgabe auch

$630\,x + 512\,y = 5531$ seyn,

bleibt $630\,x = 5531 - 512\,y$ — 512 y subtrahirt.

folglich auch $x = \frac{5531 - 512\,y}{630}$ — mit 630 dividirt.

mithin $8{,}95 - y = \frac{5531 - 512\,y}{630}$

mit 630 auf beyden Seiten multiplizirt

giebt: $5638{,}5 - 630y = 5531\ 512\,y$ — 630y subtrah.

bleibt: $5638{,}5 = 5531 + 118\,y$ — 5531 subtrahirt.

bleibt: $107{,}5 = 118\,y$ — mit 118 dividirt.

folglich: $\frac{107{,}5}{118} = 0{,}911 = y$;

setzen wir diesen für y gefundenen Werth in die Gleichung für x, nämlich $x = 8{,}95 - y$, so erhalten wir $x = 8{,}039$.

Die Probe überlassen wir dem Leser selbst, die auch von der vorhergehenden nicht unterschieden ist.

Anmerk. Das Verfahren bey der Auflösung wird verkürzt, wenn man die erste Gleichung mit 630 multiplizirt, und hievon die zweyte abzieht.

Die Rechnung selbst ist:

$x +$

$x + y = 8,85$ mit 360 multipl.

giebt $630x + 630y = 5638,5$

davon abgezogen $630x + 512y = 5531$

bleibt $118y = 107,5$ mit 118 divid.

folgl. $y = 0,911$.

x findet man wie vorhin.

Man hätte auch können die erste Gleichung mit 512 multipliziren, und die so erhaltene von der zweyten abziehen, so würde man nach geschehener Rechnung erhalten:

$$118x = 4572,4$$

folgl. $x = 8,039$ und $y = 8,95 - x = 0,911$;

Ich ziehe die Multiplikation mit 630 vor.

24ste Aufgabe.

Zwey Hirten, A und B, hatten jeder eine Heerde Schaafe, und fanden, daß, wenn A an B 30 Schaafe abgeben wollte, beyde Heerden gleich groß, daß aber die Heerde des A 3mal so groß, als die Heerde des B seyn würde, wenn B an A 40 Schaafe abgeben müßte. Wie viel Schaafe hielt eine jede Heerde?

Durch Raisonnement.

A giebt B 30 Schaafe, und sie haben gleich viel, nun giebt B an A 70 Schaafe, folglich hat A erstlich so viel, wie B, und noch 2mal 70 Schaafe mehr; da er nun überhaupt, der Aufgabe gemäß, 3mal so viel als B hat, so muß B, nachdem er 40 Schaafe an A gegeben, 70 übrig behalten, und also anfänglich 110, so wie A 170 gehabt haben.

Alge-

Algebraische Auflösung.

A habe x Schaafe gehabt, und
B habe y Schaafe gehabt;

giebt A an B 30 Schaafe, so behält A $x - 30$ und B hat nun $y + 30$.

Laut der Aufgabe hat nun A so viel Schaafe als B, mithin ist

$$x - 30 = y + 30$$ — 30 subtrahirt.

giebt $$x = y + 60.$$

Hätte aber B an A 40 Schaafe gegeben, so behielt B $y - 40$, und A hätte alsdann gehabt $x + 40$, dann hätte aber A 3mal so viel Schaafe als B gehabt.

Dieses giebt demnach wieder folgende Gleichung:

$$x + 40 = 3(y - 40)$$

oder $$x + 40 = 3y - 120$$ — 40 subtr.

giebt $$x = 3y - 160.$$

vorhin fanden wir $x = y + 60$.

mithin ist $3y - 160 = y + 60$ + 160 addirt.

bleibt $3y = y + 220$ — y subtr.

bleibt $2y = 220$ — mit 2 dividirt.

folglich $y = 110$ Schaafe.

also $x = y + 60 = 170$ Schaafe.

Probe.

Wenn A von seinen 170 Schaafen an B, der nur 110 Schaafe hat, 30 abgiebt, so behält A 140 und B hat alsdann auch 140.

Erhält

Erhält aber A von B 40 Schaafe, so hat A alsdann 210 Schaafe und B behält 70 Schaafe, und 210 ist = 3. 70.

Anmerk. Diese Auflösung wird kürzer, wenn man die erste Gleichung von der zweyten abzieht. Z. B.

Die zweyte Gleichung war $x + 40 = 3y - 120$

Die erste Gleichung ist $x - 30 = y + 30$

subtr.

bleibt $70 = 2y - 150$

$+ 150$ add.

giebt $220 = 2\ y.$

und folgl. $110 = y.$

x wird wie vorhin gefunden.

Wer x zuerst suchen wollte, verfährt am kürzesten so:

Da $x - 30 = y + 30$, so multiplizire man diese Gleichung mit 3, giebt

$$3x - 90 = 3y + 90$$

Es ist ferner $x + 40 = 3y - 120$

subtr.

bleibt $2x - 130 = 210$

mit 2 dividirt.

giebt $x - 65 = 105.$

folgl. $x = 105 + 65 = 170.$

Dritte Auflösung.

Diese Aufgabe läßt sich mit einer unbekannten Größe auflösen, wie folgt.

Wenn B. y gehabt hat, so muß A

$y + 60$ haben

und wir erhalten

$y +$

$$y + 60 + 40 = 3\,(y - 40)$$

folgl. $y = 110$ Schaafe für B;

und $y + 60 = 170$ Schaafe für A.

25ste Aufgabe.

Man weiß, daß 4 ℔. frischer und 3 ℔. gesalzener Lachs zusammen $2\frac{1}{2}$ rthlr. kosten; ferner, daß 2 ℔. frischer und 1 ℔. gesalzener Lachs zusammen für 1 rthlr. verkauft sind. Wie hoch ist ein ℔. frischer, wie hoch ein ℔. gesalzener Lachs angerechnet?

Durch Raisonnement.

Aus der Angabe erhellet erstens: daß 1 ℔. gesalzener Lachs nebst $1\frac{1}{3}$ ℔. frischem Lachs zusammen 20 gr. kosten; und zweytens: daß 1 ℔. frischer Lachs nebst 2 ℔. gesalzenem Lachs 1 rthlr. kosten; hieraus ergiebt sich deutlich, daß $\frac{2}{3}$ ℔. frischer Lachs 4 gr., und also das ganze Pfund 6 gr. kostet. Demnach kostet 1 ℔. gesalzener Lachs 1 rthlr. – 2 . 6 gr. = 12 gr.

Algebraische Auflösung.

Ein ℔. frischer Lachs hat x gr. gekostet, und ein ℔. gesalzener Lachs y gr.

Daher haben 4 ℔. frischer Lachs $4x$ gr., und 3 ℔. gesalzener Lachs $3y$ gr. gekostet.

Mithin muß der Aufgabe gemäß

$4x + 3y = 2\frac{1}{2} \cdot 24$ gr. seyn,

oder $4x + 3y = 60$ gr. seyn

———————————— $3y$ abgezogen.

bleibt $4x = 60 - 3y$

———————————— mit 4 dividirt.

giebt $x = \frac{60 - 3y}{4}$

Ferner

Ferner haben 2 ℔. frischer gekostet 2 x gr. und 1 ℔. gesalzener 1 y = y gr.

Daher ist wiederum

$2x + y = 1.\ 24$ gr. — y subtrahirt.

bleibt $2x = 24 - y$ — mit 2 dividirt.

giebt $x = \frac{24 - y}{2}$

vorhin war $x = \frac{24 - y}{4}$ gefunden.

Es ist also auch

$\frac{24 - y}{2} = \frac{60 - 3y}{4}$ — mit 4 multiplizirt.

giebt $48 - 2y = 60 - 3y$ — + 3 y subtrah.

bleibt $48 + y = 60$ — 48 subtrah.

folgl. $y = 12$ gr.; so viel hat der gesalzene Lachs gekostet.

und $x = \frac{24 - y}{2} = \frac{24 - 12}{2} = 6$ gr.; so viel hätte also der frische Lachs gekostet.

Ich habe hier noch zwey andere Auflösungen, davon die erste sehr wenig von der vorhergehenden unterschieden ist, doch man beurtheile selbst.

Zweyte Auflösung.

Ein ℔. frischer Lachs habe x rthlr. gekostet, und ein ℔. gesalzener y rthlr.: so erhalten wir folgende zwey Gleichungen.

$4x + 3y = \frac{5}{2}$ rthlr.
und $2x + y = 1$ rthlr.

Aus der ersten Gleichung finden wir

$$x = \frac{5}{8} - \frac{3y}{4} = \frac{5 - 6y}{8}$$

Aus der zweyten Gleichung finden wir, daß auch

$x = \frac{1-y}{2}$ ist,

folgl. $\frac{1-y}{2} = \frac{5-6y}{8}$ mit 8 multipl.

giebt $4 - 4y = 5 - 6y$ + 6y addirt.

bleibt $4 + 2y = 5$ 4 subtrah.

bleibt $2y = 1$ mit 2 dividirt

giebt $y = \frac{1}{2}$ rthlr. = 13 gr.

und eben so finden wir = $\frac{1}{4}$ rthlr. = 6 gr.

Dritte Auflösung.

Es wird einem jeden bey dieser Aufgabe gleich möglich seyn, einzusehen, daß sowohl ein ℔. frischer, als auch 1 ℔. gesalzener Lachs, nach dem hier gegebenen Dato, keinen ganzen Thaler kosten kann. Daher dürfte es jemanden vielleicht einfallen, so zu setzen: 1 ℔. frischer Lachs soll $\frac{1}{x}$ rthlr. und 1 ℔. gesalzener Lachs $\frac{1}{y}$ rthlr. gekostet haben; hieraus hätte man nun laut der Aufgabe folgende Gleichungen.

A.) $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2\frac{1}{2}$ rthlr. und B.) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ rthlr.

Wenn wir die Gleichung A mit xy multipliziren, so haben wir $4y + 3x = \frac{5}{2}xy$ mit $\frac{5}{2}$ dividirt.

giebt $\frac{8y + 6x}{5} = xy$.

Wenn wir die Gleichung B ebenfalls mit xy multipliziren, so erhalten wir $2x + x = xy$.

Daher

Daher $2x + y = \frac{8y + 6x}{5}$ mit 5 multipl.

giebt $10y + 5x = 8y + 6x$ $8y + 5x$ subtrah.

bleibt $2y = x$.

Setzen wir diesen für x gefundenen Werth in der Gleichung B, so ist statt $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ rthlr. nunmehro

$$\frac{2}{2y} + \frac{1}{y} = 1 \text{ rthlr.}$$

oder $$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 1 \text{ rthlr.}$$

oder $$\frac{2}{y} = 1 \text{ rthlr.}$$

folgl. $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ rthlr. und daher $\frac{1}{x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}$ rthlr.

Ohne Streit ist die dritte Auflösung am weitläuftigsten.

Jetzt will ich noch zeigen, wie jede der 3 Auflösungsarten hätten kürzer aufgelöst werden können.

In der ersten Auflösung multiplizire man die zweyte Gleichung mit 3, und ziehe die erste Gleichung ab, und verfahre ferner, wie folgende Rechnung zeigt.

Erste Gleichung $= 2y + x = 24$ gr.

3 multipl.

giebt $6x + 3y = 72$.

Die zweyte Gleichung $= 4x + 3y = 60$

subtrah.

bleibt $2x = 12$

folgl. $x = 6$ gr.

und $y = 24 - 2x = 12$ gr.

Noch vortheilhafter rechnet man folgender Gestalt:

Zweyte Gleichung $4x + 3y = 60$ gr.
Das zweyfache der ersten $= 4x + 2y = 48$
subtrah.
bleibt $y = 12$ gr.

Daher $x = \frac{24-y}{2} = 6$ gr.

Die andere Auflösung übergehe ich, weil sie auf eben die vorhergehende Art sich verkürzen läßt. Allein die dritte darf ich nicht unberührt lassen.

Aus der Gleichung A erhält man folgende:

$8y + 6x = 5.xy$, die Gleichung B mit 4 multipl.
$8y + 4x = 4.xy$
subtrahirt.
bleibt $2x = xy$
mit x dividirt.
folgl. $2 = y$.

Daher $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ rthlr. und $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ rthlr., wie vorhin.

26ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt. Wenn man die eine um 9 vergrößert, so wird sie doppelt so groß, als die andere; und wenn man die zweyte um 3 vergrößert, so wird sie doppelt so groß, als die erste.

Durch Raisonnement.

Aus dem ersten Theil der Aufgabe folgt, daß die zweyte Zahl aus der Hälfte der ersten Zahl nebst $4\frac{1}{2}$ besteht; legt man nun noch zu der 2ten Zahl 3 hinzu, so enthält sie die Hälfte der ersten Zahl nebst $7\frac{1}{2}$; theilt man ferner nach dem zweyten Theil der Aufgabe die

erste

erste Zahl in zwey gleiche Theile, so enthält die zweyte Zahl 4 solcher gleichen Theile, wovon jeder gleich der Hälfte der ersten Zahl ist; man findet also sehr leicht, daß $7\frac{1}{2}$ gleich 3mal die Hälfte von der ersten Zahl, und 5 gleich der ersten Zahl selbst seyn muß. Folglich die 2te Zahl gleich $\frac{5+9}{2} = 7$.

Algebraische Auflösung.

Es seyen die verlangten Zahlen x und y, so bekömmt man diese beyden Gleichungen:

$$x + 9 = 2y$$
$$\text{und} \quad y + 3 = 2x$$

geben addirt $x + y + 12 = 2(x + y)$, also $12 = x + y$
und geben subt. $x - y + 6 = 2(y - x)$
oder $x - y + 6 = -2(x - y)$
also $6 = -3(x - y)$
und $-2 = x - y$
also $x = \frac{12}{2} + \frac{-2}{2} = 5$, und $y = \frac{12}{2} - (\frac{-2}{2}) = 7$.

Andere gewöhnliche Auflösungen findet man in des Professors Burja selbstlehrenden Algebristen. Berlin, 1786. 2ter Theil, Seite 4.

27ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt. Wenn man die eine um 11 vergrößert, so wird sie doppelt so groß, als die andere; und wenn man die zweyte um 8 vergrößert, so wird sie doppelt so groß, als die erste.

Durch Raisonnement.

Nach den Angaben fällt sogleich in die Augen, daß die zweyte Zahl die Hälfte der ersten nebst $5\frac{1}{2}$ enthält;

hält; legt man nun zu ihr noch 8 hinzu, so besteht sie aus der Hälfte der ersten nebst $13\frac{1}{2}$, und dieß soll, der Aufgabe gemäß, 2 mal so viel seyn, als die erste Zahl, folglich muß $13\frac{1}{2}$ gleich seyn 3 mal der Hälfte der ersten Zahl, und also ist die erste Zahl selbst gleich 9.

Erste algebraische Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y. So erhält man, laut der Bedingungen der Aufgabe, folgende zwey Gleichungen.

$$x + 11 = 2y$$
$$y + 8 = 2x.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 2y - 11$;

aus der zweyten $x = \frac{y+8}{2}$

folgl. $2y - 11 = \frac{x+8}{2}$ mit 2 multipl.

giebt $4y - 22 = y + 8$ + 22 addirt.

giebt $4y = y + 30$ y subtrahirt.

bleibt $3y = 30$ mit 3 dividirt.

mithin $y = 10$

Und $x = 2y - 11 = 2.10 - 11 = 20 - 11 = 9$.

Probe.

Wird 9 um 11 und 10 um 8 vermehrt, so kömmt im ersten Fall $9 + 11 = 20 = 2.10$, und im zweyten Fall kömmt $10 + 8 = 18 = 2.9$, wie sich gehört.

Zweyte

Zweyte Auflösung.

Man addire die beyden Gleichungen,

$$\begin{array}{r} x + 11 = 2y \\ y + 8 = 2x \\ \hline x + y + 19 = 2(x + y) \end{array}$$

$x + y$ subtrah.

bleibt $19 = x + y$, als die Summe beyder Zahlen.

Man subtrahire auch beyde Gleichungen von einander, so erhält man:

$$\begin{array}{r} x - y + 3 = 2(y - x) \\ \hline \end{array}$$

$x - y$ subtrah.

$$\begin{array}{r} \text{bleibt:} \quad = 3 = 3(y - x) \\ \hline \end{array}$$

mit 3 dividirt.

kömmt: $= 1 = y - x$, als die Differenz beyder Zahlen.

Aber nun ist bekannt, wie man aus der bekannten Summe und der Differenz zweyer Zahlen die Zahlen selbst finden kann; nämlich: Die halbe Summe plus der halben Differenz giebt die größere, die halbe Summe weniger der halben Differenz die kleinere Zahl. Folglich: $\frac{19}{2} + \frac{1}{2} = 10$; und $\frac{19}{2} - \frac{1}{2} = 9$, wie vorhin.

Diese Auflösung hat vor der ersten in ganz allgemeinen Fällen den Vorzug, wie sich sogleich bey folgender allgemeinen Aufgabe zeigen wird.

28ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt. Wenn man die eine um a vergrößert, so wird sie n mal so groß, als die andere; und wenn man die

zweyte

zweyte um b vergrößert, so wird sie n mal so groß, als die erste.

Erste Auflösung.

Die erste Zahl sey x, die andere y. So ist, laut der Aufgabe, $x + a = ny$ (A

und $y + b = nx$ (B

aus A folgt $x = ny - a$

aus B folgt $x = \frac{y + b}{n}$

folglich: $ny - a = \frac{y + b}{n}$

mit n multiplizirt.

giebt: $n^2 y - na = y + b$

+ na addirt.

giebt: $n^2 y = y + b + na$

y subtrahirt.

bleibt: $(n^2 - 1) y = b + na$

mit n^2-1 divid.

giebt $y = \frac{b + na}{n^2 - 1}$;

also: $x = n \cdot \left(\frac{b + na}{n^2 - 1}\right) - a = \frac{nb + n^2 a - n^2 a + a}{n^2 - 1} =$

$= \frac{a + nb}{n^2 - 1}$ und hieraus folgt $x + y = \frac{a + nb}{n^2 - 1} + \frac{b + na}{n^2 - 1} =$

$= \frac{na + a + nb + b}{n^2 - 1} = \frac{(n + 1) a + (n + 1) b}{n^2 - 1} =$

$= \frac{(n + 1)(a + b)}{n^2 - 1} = \frac{(n + 1)(a + b)}{(n + 1)(n - 1)} = \frac{a + b}{n - 1}$;

und

und $x - y = \frac{a - na + nb - b}{n^2 - 1} = \frac{(n-1)b - (n-1)a}{n^2 - 1} =$

$= \frac{(n-1)(b-a)}{(n+1)(n-1)} = \frac{b-a}{n+1}$.

Zweyte Auflösung.

$x + a = ny$ (A
und $y + b = nx$ (B
addirt.

$x + y + a + b = n(x + y)$
$x+y$ subtrahirt.

bleibt: $a + b = (n - 1)(x + y)$
mit $n-1$ dividirt.

giebt: $\frac{a+b}{n-1} = x + y$;

Die Gleichung A von B subtrahirt, giebt:

$y - x + b - a = n(x - y)$
$x-y$ addirt.

kommt: $b - a = (n + 1)(x - y)$
mit $(n+1)$ dividirt

giebt: $\frac{b-a}{n+1} = x - y$;

also: $x = \frac{a+b}{2(n-1)} + \frac{b-a}{2(n+1)} = \frac{a+nb}{n^2-1}$;

und $y = \frac{a+b}{2(n-1)} - \frac{b-a}{2(n+1)} = \frac{b+na}{n^2-1}$.

Wenn nun n und a sehr groß sind, so ist es bequemer, nicht gleich die Zahlen selbst zu berechnen, sondern lieber erst ihre Summe und Differenz.

In Worten ausgedrückt, geben die gefundenen allgemeinen Formeln folgende Regeln.

Um

Um die Summe beyder Zahlen zu finden:

Addire die beyden zu addirenden Zahlen, und dividire diese Summe durch die Zahl weniger Eins, die da anzeigt, wie viel Mal eine von den gesuchten Zahlen größer wird.

Um die Differenzen zu finden:

Subtrahire die beyden zu addirenden Zahlen, und dividire hierin mit der um eins vermehrten Zahl, die da anzeigt, wie viel Mal eine von den gesuchten Zahlen größer wird.

Um eine von den Zahlen selbst zu finden:

Addire zu der einen der zu addirenden Zahlen ein Vielfaches aus der andern in der Zahl, die da anzeigt, wie viel Mal eine von den gesuchten Zahlen größer wird, und diese Summe dividire mit dem um Eins verminderten Quadrat der letztgedachten Zahl.

In der 27sten Aufgabe war $a = 11$; $b = 8$, und $n = 2$;

also die Summe beyder Zahlen $= \frac{11 + 8}{2 - 1} = 19$;

die Differenz beyder Zahler $= \frac{11 - 8}{2 + 1} = 1$.

Wer die Differenz nach der oben gegebenen Regel sucht, könnte auch leicht so rechnen $\frac{8 - 11}{-2 + 3} = -1$; dieses macht in der Rechnung keinen Unterschied, und man findet die Zahlen doch richtig. Die Ursache liegt in der algebraischen Addition und Subtraktion, wo das Addiren öfters ein Subtrahiren ist, und umgekehrt.

Sucht

Sucht man auch die Zahlen selbst nach der schriftlichen Regel, so stehet die Rechnung wie folget:

Eine der gesuchten Zahlen $= \frac{11 + 2 \cdot 8}{2^2 - 1} = 9$

die andere $= \frac{8 + 2 \cdot 11}{2^2 - 1} = 10$, alles wie in der 5ten Aufgabe.

29ste Aufgabe.

Zwey Schäfer, A und B, machen einander folgende Forderung: A sagt zu B; gieb mir eines von deinen Schaafen, so habe ich alsdann gerade doppelt so viel, als du. Nein, sagt B, gieb du mir vielmehr eins von deinen Schaafen, denn haben wir gerade gleich viel. Wie viel Schaafe mag ein jeder gehabt haben?

Auflösung.

A habe x und B habe y Schaafe gehabt. Gäbe nun B eins von seinen Schaafen an A, so behält B nur noch $(y - 1)$ Schaafe, und A hätte nun $(x + 1)$ Schaafe. A sagt aber, er hätte nun doppelt so viel Schaafe als B, also muß $x + 1 = 2(y - 1)$ seyn.

Hätte aber nicht B an A, sondern A an B eines von seinen Schaafen gegeben, so würde A nur noch $(x - 1)$, B aber $(y + 1)$ Schaafe haben. Nun sagt B, sie hätten alsdann gleich viel Schaafe; daher muß auch

$$x - 1 = y + 1 \text{ seyn.}$$

Vorhin fanden wir: $x + 1 = 2y - 2$.

Aus der obern Gleichheit finden wir

$x =$

$$x = y + 2$$

und aus der untern Gleichung $x = 2y - 3$

folglich $y + 2 = 2y - 3$

Nämlich: wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich.

Also $2 = y - 3$
mithin $5 = y$
daher $x = y + 2 = 5 + 2 = 7$

Zweyte Auflösung.

$x + 1 = 2y - 2$
$x - 1 = y + 1$
subtrahirt.
$+ 2 = y - 3$
folglich wie vorhin $5 = y$

Dritte Auflösung.

(Bloß mit einer unbekannten Größe.)

Wenn B y Schaafe hat, so muß laut der ersten Bedingung A haben $y + 2$.

Die zweyte Bedingung giebt daher folgende Gleichung:

$$y + 3 = 2(y - 1)$$
folgl. $5 = y$ und $y + 2 = 7$.

Probe.

A hat 7 und B hat 5 Schaafe; giebt nun B an A Eins, so behält er 4 und A hat nun 8, also gerade doppelt so viel. Giebt aber A Eins an B, so behält er 6, und B bekömmt nun auch 6, also beyde gleich viel.

30ste Aufgabe.

Ein Vater wurde von seinem Sohne gefragt, wie alt sie beyde wären? Vor 6 Jahren war ich um das Drittheil mehr als dreymal so alt, als du; nach 3 Jahren hingegen werde ich so alt seyn, daß ich dein Alter mit $2\frac{1}{6}$ multiplizi-ziren müßte, wenn es dem meinigen gleich werden sollte. Wie alt ist jeder?

Auflösung.

Der Vater sey x Jahre und der Sohn jetzt y Jahre alt,

so war der Vater vor 6 Jahren alt $= x - 6$
der Sohn $= \quad = \quad = \quad , \quad y - 6$ } Jahre

Die erste Bedingung giebt folgende Gleichung:

$$\text{I.} \quad x - 6 = 3\tfrac{1}{3}(y - 6)$$

und die 2te Bedingung giebt

$$\text{II.} \quad x + 3 = 2\tfrac{1}{6}(y + 3)$$

Beyde Gleichungen mit 6 multiplizirt, giebt

$$6x - 36 = 20y - 120$$
$$\text{und } 6x + 18 = 13y + 39$$

Die untere Gleichung von der obern abgezogen, giebt

$$-54 = 7y - 159$$
$$105 = 7y$$
$$\text{folgl. } 15 = y \text{ Alter des Sohns.}$$

Aus I. folgt

$$x = \tfrac{10}{3}(y - 6) + 6$$
$$= \tfrac{10}{3} \cdot 9 + 6$$
$$= 36 \text{ Jahre. Alter des Vaters.}$$

31te Aufgabe.

A und B besitzen zusammen ein Vermögen von 9800 rthlr. A giebt zu einer Handelsspekulation den sechsten, und B den fünften Theil seines Vermögens her, und doch behalten beyde gleich viel übrig. Wie reich ist jeder von ihnen?

Auflösung.

A habe x
B = y
} Thaler in Vermögen.

Die Bedingungen der Aufgaben geben folgende zwey Gleichungen:

$$\text{I.}\quad x + y = 9800 \text{ rthlr.}$$

$$\text{und II.}\quad \tfrac{5}{6}\, x = \tfrac{4}{5}\, y.$$

Aus II. folgt $\tfrac{2}{2}\tfrac{5}{4}\, x = y$

Diesen Werth von y in I. gesetzt, giebt

$$x + \tfrac{2}{2}\tfrac{5}{4}\, x = 9800$$

$$49 . x = 24 . 9800$$

$$\text{folgl.}\quad x = 24 . 200 = 4800 \text{ rthlr.}$$

$$\text{also}\quad y = 9800 - x = 5000 \text{ rthlr.}$$

32ste Aufgabe.

Ein Wasserbehälter von 210 Eimern kann durch zwey Oeffnungen gefüllt werden. Man hat durch einen Versuch, wobey die erste Oeffnung 4 und die zweyte 5 Stunden offen war, 90 Eimer Wasser erhalten. Durch einen andern Versuch, wobey die erste Oeffnung 7, und die

andere

andere $3\frac{1}{2}$ Stunden offen war, erhielt man 126 Eimer. Wie viel Eimer giebt jede Oeffnung in einer Stunde? Und in welcher Zeit wird der Behälter voll werden, wenn das Wasser durch beyde Oeffnungen zugleich einfließt?

Auflösung.

Die erste Oeffnung soll in einer Stunde geben x Eimer.
= 2te = = = = = = y —

so giebt die erste in 4 Stunden $4x$
und die 2te in 5 " $5y$ } Eimer.

Die erste Bedingung liefert nun folgende Gleichung.

$$\text{I. } 4x + 5y = 90$$

Eben so liefert die zweyte Bedingung folgende Gleichung.

$$\text{II. } 7x + \tfrac{7}{2}y = 126.$$

Die Gleichung II. mit 7 dividirt, giebt

$$\text{III. } x + \tfrac{y}{2} = 18$$

Diese mit 4 multiplizirt, giebt

$$\text{IV. } 4x + 2y = 72.$$

IV. von I. subtrahirt, giebt

$$3y = 18$$
$$\text{folgl. } y = 6 \text{ Eimer.}$$

III. giebt $x = 18 - \frac{y}{2} = 18 - 3 = 15$ Eimer.

Der ganze Behälter werde in Z Stunden von beyden Röhren zusammen gefüllt, so geben, da beyde Röhren in jeder Stunde zusammen $(x + y)$ Eimer geben, beyde in z Stunden

$z(x + y)$

$z\,(x+y)$ Eimer. Es muß daher

$$z \,.\, (x + y) = 210 \text{ seyn;}$$

folgl. $$z = \frac{210}{x+y} = \frac{210}{6+15} = \frac{210}{21} = 10 \text{ Stunden.}$$

33ste Aufgabe.

Ein Wiener hat 500 Stück Siebzehner und Siebener; ihr Werth beträgt 112 fl. 40 kr. Wieviel Stücke hat er von jeder Sorte insbesondere?

Auflösung.

Es mögen x Siebzehner und y Siebener gewesen seyn. So geben die Bedingungen folgende Gleichungen.

$$\text{I.} \quad x + y = 500 \text{ kr.}$$

$$\text{II.} \quad 17x + 7y = 6760 \text{ kr.}$$

Aus I. folgt $$\text{III.} \quad y = 500 - x.$$

Diesen Werth in II. gesetzt, giebt

$$17x + 7 \,.\, (500 - x) = 6760$$

$$10x + 3500 = 6760$$

$$10x = 3260$$

folgl. $$x = 326 \text{ Stück Siebzehner.}$$

Und aus III. $y = 500 - 326 = 174$ Stück Siebener.

34ste Aufgabe.

Jemand hat zweyerley Waaren. 8 ℔. von der ersten und 19 ℔. von der zweyten kosten zusammen 18 rthlr. 5 gr.; ferner kosten 20 ℔. von der

der ersten und 16 ℔. von der zweyten zusammen 25 rthlr. 20 gr. Wie viel kostet das ℔. einer jeden Waare insbesondere?

Auflösung.

Die erste Waare koste das ℔. x gr.
Die zweyte koste das ℔. y gr.,
so geben die Bedingungen folgende zwey Gleichungen.

$$\text{I.}\quad 8x + 19y = 18 \cdot 24 + 5$$
$$\text{II.}\quad 20x + 16y = 25 \cdot 24 + 20$$

I. mit 5 und II. mit 2 multiplizirt, giebt

$$40x + 95y = (18 \cdot 24 + 5)\,5$$
und $$40x + 32y = (25 \cdot 24 + 20) \cdot 2 \text{ subtr.}$$

bleibt $63y = 90 \cdot 24 + 25 - 50 \cdot 24 - 40$,
oder $63y = 40 \cdot 24 - 15$ mit 3 dividirt.
$21y = 40 \cdot 8 - 5$

folgl. $y = \frac{315}{21} = 15$ gr.

$\frac{1}{4}$ von II. ist $5x + 4y = 25 \cdot 6 + 5$

also $x = 31 - \frac{4y}{5}$

$= 31 - 12 = 19$ gr.

35ste Aufgabe.

15 Schlesische und 33 Leipziger Ellen machen zusammen so viel als $39\frac{1}{2}$ Brabanter Ellen; ferner 24 Schlesische und 55 Leipziger Ellen zusammen so viel als 65 Brabanter Ellen. Wie verhält sich nach diesen Angaben die

Schle-

Schlesische und die Leipziger Elle zur Brabanter? Wie verhält sich ferner die Schlesische Elle zur Leipziger? Und um wie viel Prozent differiren die letzteren?

Auflösung.

Die Schl. : Brab $=$ x : y, d. h. x Brab. $=$ y Schles. Ellen; also 1 Brab. $= \frac{y}{x}$ Schles.

und daher $39\frac{1}{2}$ Br. $= 39\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$ Schl. Ellen,

oder 65 Br. $=$ 65 . $\frac{y}{x}$ Schl.

Mithin 15 Schl. $+$ 33 Lpz. $= 39\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$ Schl.

33 Lpz. $= (39\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - 15)$ Schl.

oder I. 11 Lpz. $= (13\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - 5)$ Schl.

Ferner

24 Schl. $+$ 55 Lpz. $= \frac{65 \cdot y}{x}$ Schl.

II. 55 Lpz. $= (\frac{65y}{x} - 24)$ Schl.

oder III. 11 Lpz. $= (\frac{13y}{x} - \frac{24}{5})$ Schl.

Daher aus I. und III.

$$13\tfrac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - 5 = \frac{13y}{x} - \tfrac{24}{5}$$

$$13\tfrac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{13y}{x} + \tfrac{1}{5}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} = \tfrac{1}{5}$$

IV. $\frac{y}{x} = \frac{6}{5}$

das heißt: $x : y = 5 : 6$

oder Schl. Elle : Br. Elle $= 5 : 6$

Ferner aus II. und IV.

$$55 \text{ Lpz.} = \left(\frac{65 \cdot y}{x} - 24\right) \text{Schl.}$$
$$= (65 \cdot \tfrac{6}{5} - 24) \text{ Schl.}$$
$$= (13 \cdot 6 - 4 \cdot 6) \text{ Schl.}$$
$$= 9 \cdot 6 \text{ Schl.}$$
$$= 54 \text{ Schl.}$$

folglich Lpz. Elle : Schl. Elle $= 54 : 55$

Um nun auch zu finden, um wie viel Procent die Leipziger und Schlesische Elle differiren, so schließe man

$$54 : 55 = 100 : 101\tfrac{23}{27}.$$

Es ist also die Schlesische Elle um $1\frac{23}{27}$ Procent länger, als die Leipziger.

Kürzer ist folgende Auflösung.

Aus der Aufgabe ergiebt sich sogleich, daß

I. $15 \cdot S + 33\,L = 39\frac{1}{2} \cdot B$

und II. $24 \cdot S + 55\,L = 65 \cdot B$

5 mal I. weniger 3 mal II., giebt

$$3 \cdot S = 2\tfrac{1}{2} \cdot B$$

also $S : B = 2\frac{1}{2} : 3$

$= 5 : 6$

Eben so giebt $5 \cdot II - 8 \cdot I$

$$11 \cdot L = 9 \cdot B$$

das heißt $B : L = 11 : 9$

Nun war $S : B = 5 : 6$

folgl. $S : L = 55 : 54$.

36ste Aufgabe.

$17\frac{1}{2}$ Danziger und 19 Berliner Fuß machen zusammen so viel als $34\frac{3}{4}$ Rheinländische Fuß; ferner, 5 Danziger und $9\frac{1}{2}$ Berliner Fuß so viel als $13\frac{53}{56}$ Rheinländische. Wie verhält sich nach diesen Angaben der Danziger und der Berliner Fuß zum Rheinländischen? Wie der Danziger zum Berliner Fuß? Und wie viel Procent differiren diese beyden letzteren?

Auflösung.

I. $17\frac{1}{2} . D + 19 . B = 34\frac{3}{4} . Rl.$
II. $5 . D + 9\frac{1}{2} . B = 13\frac{53}{56} . Rl.$

Die Gleichung II. mit 2 multiplizirt und von I. abgezogen, giebt

$7\frac{1}{2} . D = 6\frac{6}{7} . Rl.$
oder $\frac{15}{2} . D = \frac{48}{7} . Rl.$ mit 3 dividirt
giebt $\frac{5}{2} . D = \frac{16}{7} . Rl.$ mit 14 multiplizirt
$35 . D = 32 . Rl.$
daher $\underline{D} : \underline{Rl.} = \underline{32} : \underline{35}$

Die Gleichung I. mit 2 und II. mit 7 multiplizirt, giebt

III. $35 . D + 38 . B = 69\frac{1}{2} . Rl.$
und IV. $35 . D + 66\frac{1}{2} . B = 97\frac{5}{8} . Rl.$

IV. weniger III. giebt

$28\frac{1}{2} . B = 28\frac{1}{8} . Rl.$ mit 8 multiplizirt
$228 . B = 225 . Rl.$ mit 3 dividirt
giebt $76 . B = 75 . Rl.$

Daher

Daher

$$\underline{B} : \underline{Rl.} = \underline{75} : \underline{76.}$$

$$\underline{Rl.} : \underline{D} = 35 : 32$$

Mithin $\underline{B} : \underline{D} = \underline{2625} : \underline{2432}$.

Um wie viel Procent der Berliner und Danziger Fuß differiren, finden wir durch folgende Regeldetri

$$2625 : 2432 = 100 : 107\tfrac{568}{608}$$

das heißt: der Berliner Fuß ist um $7\frac{568}{608}$, oder ungefähr um $7\frac{14}{15}$ Procent länger, als der Danziger.

37ste Aufgabe.

40 Französische Meilen machen, wenn sie auf geographische oder deutsche Meilen reduzirt werden, $12\frac{1}{2}$ solche Meilen mehr, als 53 Englische. 10 Französische und $26\frac{1}{2}$ Englische Meilen machen zusammen so viel, als $11\frac{3}{4}$ deutsche Meilen. Wie verhält sich nach diesen Angaben die Französische und Englische Meile zur Deutschen? Und wie die Französische zur Englischen?

Auflösung.

I. $40 . F - 53 . E = 12\frac{1}{2} . G$

II. $10 . F + 26\frac{1}{2} . E = 11\frac{3}{4} . G$

Die Gleichung I. von dem vierfachen der Gleichung II. abgezogen, giebt

$159 . E = 34\frac{1}{2} . G$

$159 . E = \frac{69}{2} . G$ mit $\frac{2}{3}$ multipl.

giebt 106 . E = 23 . G

demnach

$$\frac{G}{} : \frac{E}{} \quad 106 : 23$$

Zu dem Zweyfachen von II. addire man I., so erhält man

60 . F = 36 . G mit 12 dividirt

giebt 5 . F = 3 . G.

Mithin $\frac{G}{} : \frac{F}{} = \frac{5}{} : \frac{3}{}$

Oben war $\frac{E}{} : \frac{G}{} = 23 : 106$

Folgl. $\frac{E}{} : \frac{F}{} = \frac{115}{} : \frac{318}{}$

38ste Aufgabe.

Jemand verwechselte 250 Friedrichsd'or gegen Dukaten, und erhielt dafür 439 Dukaten und noch 14 Gr. Zu den nämlichen Coursen verwechselte er noch 160 Friedrichsd'or, und erhielt dafür 281 Dukaten und 6 Gr. heraus. Wie hoch wurde jede Geldmünze gerechnet?

Auflösung.

Der Friedrichsd'or sey zu x rthlr.
und der Dukaten zu y rthlr. } gerechnet,

so haben wir

I. 250 . x rthlr. = 439 . y rthlr. + $\frac{7}{12}$ rthlr.
II. 190 . x rthlr. = 281 . y rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr.

oder III. 3000 x = 5268 . y + 7
und IV. 640 x = 1124 . y + 1

Um

Um nun aus III. und IV. x zu eliminiren, so überlege man, daß, da

$$\frac{3000}{640} = \frac{75}{16},$$

$$16 \cdot 3000 = 75 \cdot 640,$$

also muß man III. mit 16 und IV. mit 75 multipliziren, dieses giebt

$$16 \cdot 3000 \cdot x = 16 \cdot 5268 \cdot y + 16 \cdot 7$$

und $$75 \cdot 640 \cdot x = 75 \cdot 1124 \cdot y + 75$$

demnach $$0 = (16 \cdot 5268 - 75 \cdot 1124)y + 37$$

oder $$0 = -12y + 37$$

$$12y = 37$$

folgl. $y = 3$ rthlr. 2 gr.

und aus II. $$x = \frac{5268 \cdot \frac{37}{12} + 7}{3000}$$

$$= \frac{439 \cdot 37 + 7}{3000}$$

$$= \frac{16250}{3000} = 5 \text{ rthlr. } 10 \text{ gr.}$$

39ste Aufgabe.

Ein Reisender sagte: Ich bin durch Deutschland, Frankreich und England gereist, und habe in diesen drey Ländern eine Summe von 8325 rthlr. verzehrt; nämlich in Deutschland 1520 rthlr., in Frankreich 7540 Livres, und in England 820 Pfund Sterling. Als man ihn hierauf nach dem dieser Rechnung zum Grunde liegenden Werth der fremden Geldsorten fragte, gab er zur Antwort, daß 5 Pfund Sterling

mehr als 108 Livres betragen. Wie hoch hatte er jede Münzsorte gerechnet?

Auflösung.

Das Pfund Sterling sey zu x rthlr.
Der Livre = zu y rthlr. } gerechnet.

In Frankreich hat er verzehrt 7540 . y rthlr.
In England = = 820 . x rthlr.
In Deutschland = = 1520 rthlr.

In allen drey Ländern zusammen $7540 \cdot y + 820 \cdot x + 1520$ rthlr.

Demnach haben wir aus der ersten Bedingung der Aufgabe

$7540 \cdot y + 820\ x + 1520$ rthlr. $= 8325$ rthlr. 1520 subtr.
$7540 \cdot y + 820 \cdot x = 6805$ mit 5 dividirt.

I. $1508 \cdot y + 164 \cdot x = 1361$

Die zweyte Bedingung giebt

II. $5 \cdot x$ rthlr. $= 108y$ rthlr. $+ 3$ rthlr.

Da nun $\frac{1508}{108} = \frac{377}{27}$

also $1508 \cdot 27 = 108 \cdot 377$

so multiplizire man I. mit 27 und II. mit 377, so erhält man

$1508 \cdot 27 \cdot y + 27 \cdot 164\ x = 27 \cdot 1361$
und $108 \cdot 377 \cdot y + 3 \cdot 377 = 5 \cdot 377x$ subtrahirt.

$27 \cdot 164x - 3 \cdot 377 = 27 \cdot 1361 - 5 \cdot 377x$

$(27 \cdot 164 + 5 \cdot 377)x = 27 \cdot 1361 + 3 \cdot 377$

$6313 \cdot x = 37878$
folgl. $x = 6$ rthlr.

Aus

Aus II. folgt

$$y = \frac{5 \cdot x - 3}{108}$$

$$= \frac{5 \cdot 6 - 3}{108} = \frac{27}{4} \text{ rthlr.} = 6 \text{ gr.}$$

40ste Aufgabe.

Es ist nicht lange her, sagt Jemand, wo der Scheffel Waizen 1 rthlr. und der Scheffel Roggen 21 gr. wohlfeiler war, als jetzt; damahls verhielt sich der Preis des Waizens zum Preise des Roggens wie 10 : 7; jetzt ist dieses Verhältniß wie 4 : 3. Wie theuer ist der Scheffel von jeder Getraideart?

Auflösung.

Der Scheffel Waizen mag x rthlr. und
" " Roggen " y rthlr. gekostet haben.

Die Bedingungen geben folgende 2 Proportionen:

I. $x - 1 : y - \frac{7}{8} = 10 : 7$

II. $x : y = 4 : 3$

also III. $28x = 40y - 7$

IV. $3x = 4y$

Aus IV. folgt $y = \frac{3}{4}x$; diesen Werth von y in III. gesetzt, giebt

$$28x = 30x - 7$$

$$7 = 2x$$

folgl. 3 rthlr. $x = 2$ rthlr. 12 gr.

und $y = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = 2\frac{5}{8}$ rthlr. $= 2$ rthlr. 15 gr.

41te Aufgabe.

Jemand hat zweyerley Weine zu verschiedenen Preisen. Vermischt er a Quart des ersten mit b Quart des zweyten, so kann er das Quart dieser Mischung für c gr. verkaufen. Vermischt er aber f Quart des ersten mit g Quart des zweyten, so kann er das Quart dieser Mischung für h gr. verkaufen. Was kostet das Quart einer jeden Sorte?

Auflösung.

Von der besten Sorte koste das Quart x gr.
= = schlechten = = = y gr.

Die erste Bedingung giebt

$$\text{I.} \quad ax + by = (a + b)\,c$$

Die zweyte Bedingung giebt

$$\text{II.} \quad fx + gy = (f+g)\,.\,h$$

I. mit g und II. mit b multiplizirt, giebt

$$agx + bgy = (a+b)\,cg$$
$$\text{und} \quad bfx + bgy = (f+g)\,bh$$

subtrah.

$$\text{bleibt} \quad (ag - bf)\,x = (a+b)\,cg - (f+g)\,bh$$

$$\text{folgl.} \quad x = \frac{(a+b)\,cg - (f+g)\,bh}{ag - bf}$$

Eben so findet man

$$y = \frac{(f+g)\,.\,ah - (a+b)\,cf}{ag - bf}$$

Beyspiel.

Es sey

$a = 3$ Quart	$f = 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ Quart
$b = 5$ =	$g = 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ =
$c = 20$ gr. 6 pf. $= 41/2$ gr.	$h = 20$ gr.

so

so ist

$$x = \frac{8 \cdot \frac{41}{2} \cdot \frac{15}{2} - \frac{45}{4} \cdot 5 \cdot 20}{3 \cdot \frac{15}{2} - 5 \cdot \frac{15}{4}}$$

$$= \frac{8 \cdot 41 \cdot 15 - 45 \cdot 5 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 15 - 5 \cdot 15}$$

$$= 8 \cdot 41 - 3 \cdot 5 \cdot 20$$

$$= 328 - 300 = 28 \text{ gr.}$$

und

$$y = \frac{\frac{45}{4} \cdot 3 \cdot 20 - 8 \cdot \frac{41}{2} \cdot \frac{15}{4}}{3 \cdot \frac{15}{2} - 5 \cdot \frac{15}{4}}$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 20 - 4 \cdot 41$$

$$= 180 - 164 = 16 \text{ gr.}$$

42ste Aufgabe.

37 Pfund Zinn verlieren im Wasser 5 Pfund, und 23 Pfund Bley verlieren im Wasser 2 Pfund; ferner, eine Mischung aus beyden genannten Metallen von 120 Pfunden verliert im Wasser 14 Pfund. Wie viel Zinn und Bley ist in dieser Mischung?

Auflösung.

In der Mischung seyen x ℔. Zinn und y ℔. Bley, und schließe, da 37 ℔. Zinn 5 ℔. im Wasser verlieren, so müssen x ℔. $\frac{5}{37}x$ ℔. im Wasser verlieren. Eben so finden wir, daß y ℔. Bley im Wasser $\frac{2y}{23}$ ℔. verlieren.

Beyde Massen verlieren demnach im Wasser zusammen

$$\text{I. } \frac{5}{37}x + \frac{2y}{23} = 14 \text{ ℔.}$$

Ferner

Ferner muß seyn

$$\text{II.} \quad x + y = 120$$

Woraus $x = 74$ ℔. Zinn und $y = 46$ ℔. Bley gefunden wird.

43ste Aufgabe.

Eine Gesellschaft verzehrte in einem Gasthause eine gewisse Summe, und zwar einer so viel als der andere. Wären 5 Personen mehr gewesen, und hätte jede 3 gr. mehr verzehrt, so hätte die Zeche 6 rthlr. 15 gr. mehr betragen; wären aber 3 Personen weniger gewesen, und hätte jede 2 gr. weniger verzehrt, so hätte die Zeche 3 rthlr. 10 gr. weniger betragen. Wie stark war die Gesellschaft, und wie viel verzehrte jede Person?

Auflösung.

Die Personen seyen x gewesen und jede habe y gr. verzehrt, so würden diese überhaupt verzehrt haben xy gr.

Wenn aber von $(x+5)$ Personen jede $(y+3)$ gr. verzehrt, so verzehren diese $(x+5)$ Personen zusammen

$$(x+5)\ (y+3)\ \text{Gr.}$$

Dieses giebt die erste Gleichung

$$\text{I.} \quad (x+5)\ (y+3) = xy + 6 \,.\, 24 + 15$$

Wären es nur $(x-3)$ Personen gewesen, und hätte jede nur $(y-2)$ gr. verzehrt, so würden diese $(x-3)$ Personen nur

$$(x-3)\ (y-2)\ \text{gr. verzehrt haben.}$$

Dieses

Dieses giebt die zweyte Gleichung

II. $(x-3)\,(y-2) = xy - 3 \,.\, 24 - 10$

Aus I. folgt

III. $5y + 3x = 6 \,.\, 24 = 144$

Aus II. folgt IV. $3y + 2x = 88$

2mal III. weniger 3mal IV. giebt

$$y = 24 \text{ gr.}$$

Aus IV. folgt

$$x = 44 - \frac{3y}{2}$$

$$= 44 - 36 = 8 \text{ Personen.}$$

Bliebe alles wie vorhin, nur daß statt 6 rthlr. 15 gr., 6 rthlr. 13 gr. verzehrt wären, so wäre

$y = 20$ gr. und $x = 14$ Personen.

44ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt, deren Differenz, Summe und Produkt sich gegen einander wie die Zahlen 2, 3, 5 verhalten; das heißt: deren Differenz sich zu ihrer Summe wie 2 zu 3, und deren Summe sich zu ihrem Produkte wie 3 zu 5 verhält. Welche Zahlen sind es?

Auflösung.

Die gesuchten zwey Zahlen seyen x und y, so soll, laut der Aufgabe, seyn

I. $(x-y) : x+y = 2 : 3$
II. $(x+y) : x \,.\, y = 3 : 5$

Nun giebt I.

III. $2x : x + y = 5 : 3$

Diese Proportion mit II. zusammengesetzt, giebt

$$2x = x \cdot y$$
$$\text{folgl. } 2 = y$$

Aus III. folgt $6x = 5x + 5y$

$$x = 5y$$
$$= 5 \cdot 2 = 10$$

45ste Aufgabe.

Von zwey Zahlen werden folgende Verhältnisse angegeben. Nimmt man von der einen Zahl einige bekannte Einheiten weg und addirt diese zur andern Zahl, so soll diese bekannte einige Mal größer oder kleiner werden, als jene alsdann ist. Was sind das für Zahlen?

Auflösung.

Die zwey unbekannten Zahlen sollen durch x und y bezeichnet seyn.

a und b sollen die bekannten Einheiten und Größen bedeuten, die man von der einen unbekannten Größe wegnimmt und zu der andern addirt.

m und n sollen anzeigen, wie vielmal die eine unbekannte Größe nach Abzug des a oder b größer oder kleiner geworden ist, als die andere, durch Hinzuthun der a und b.

Nimmt man demnach von y a weg, und addirt diese a zu x, so bleibt bey jener $(y-a)$, und bey dieser kömmt $(x+a)$. Nun sey $(x+a)$ n mal so groß, als $(y-a)$, so giebt diese Bedingung folgende Gleichung:

$$x + a = n(y - a) = ny - na$$

Man

Man subtrahire nun b von x, so erhält man $(x-b)$; diese b addire man zu y, so kömmt $y+b$.

Hier sey nun: $x-b=m(y+b)$

oder: $x-b=my+mb$

vorhin fanden wir: $x+a=ny-na$, die obere Gleichung von der untern abgezogen, giebt: $a+b=(n-m)y-na-mb$

also: $na+a+mb+b=(n-m)y$

oder: $(n+1)a+(m+1)b=(n-m)y$

folglich: $\frac{(n+1)a+(m+1)b}{n-m}=y.$

Nun wollen wir auch den Werth für x suchen.

Es war: $x-b=my+mb$

daher: $x=my+(m+1)b$, wird hier der für y gefundene Werth gesetzt, so erhält man:

$$x=\frac{m(n+1)a+m(m+1)b}{n-m}+(m+1)b$$

oder

$$x=\frac{m(n+1)a+m(m+1)b+(n-m)(m+1)b}{n-m}$$

oder

$$x=\frac{m(n+1)a+m(m+1)b+n(m+1)b-m(m+1)b}{n-m}$$

mithin:

$$x=\frac{m(n+1)a+n(m+1)b}{n-m}$$

Dieses ist die allgemeinste Aufgabe, dergleichen die 3te und 7te nur für besondere Fälle sind. Z. B. in der 3ten Aufgabe ist: $30=b$; $a=40$, $m=1$, und $n=3$,

folg=

folglich: $y = \frac{(3+1)\cdot 40 + (1+1)\cdot 30}{3-1} =$

$\frac{4\cdot 40 + 2\cdot 30}{2} = 110$ und

$x = \frac{1\cdot(3+1)\cdot 40\cdot + 3\cdot(1+1)\cdot 30}{3-1} =$

$\frac{4\cdot 40 + 3\cdot 2\cdot 30}{2} = 100.$ In der Aufgabe ist: $a = b = 1$, $n = 2$ und $m = 1$, folglich für diesen Fall $y = \frac{(2+1)\cdot 1 + (1+1)\cdot 1}{2-1} = 3+2 = 5$

und $x = \frac{1\cdot(2+1)\cdot 1 + 2(1+1)\cdot 1}{2-1} = 3+2\cdot 2 = 7$

In beyden Aufgaben fanden wir für x und y eben diese Werthe.

Die Formel für y ist einfacher, als für x, daher würde ich immer erst y suchen, alsdann würde ich nicht x aus der allgemeinen Formel berechnen, sondern, da ich weiß, daß

$$x = my + (m+1)\,b$$

so rechne ich nach dieser Formel, wo y schon gefunden, dieß ist ja bequemer. In dem ersten Beyspiele fanden wir vorhin $y = 110$; daher nach dieser Formel:

$$x = 110 + 2\cdot 30 = 170,$$ wie vorhin.

Im zweyten Beyspiele war $y = 5$, also:

$$x = 5 + 2\cdot 2 = 7$$ auch wie vorhin.

Aber, höre ich den Anfänger fragen: wozu nützt es also, daß wir die allgemeine Formel auch für x gesucht haben? Antwort: „Es ist oft nöthig, das Verhalten der unbekannten Größen gegen einander zu bestimmen, und dieses kann wohl nicht anders geschehen,

als

als wenn ihr Werth in lauter bekannten Grösen angegeben wird, hier aber dient es Anfängern, die ihnen so nöthige Fertigkeit in Behandlung analytischer Formeln sich zu verschaffen."

Allgemeine Formeln haben noch das vorzügliche, daß sich aus ihnen für besondere Fälle auch Formeln ableiten lassen. Z. B. sollte $a = b$ seyn, so erhalten wir folgende Formeln:

$$y = \frac{(m + m + 2)\,a}{n - m}$$

und

$$x = \frac{[m\,(n + 1) + n\,(m + 1)]\,.\,a}{n - m}$$

Wollten wir $n - m$ setzen, so würde in allen Formeln für y und x der Divisor $n - m = o$, der Dividendus aber bleibt eine ganze positive Zahl.

Offenbar wird x und y desto gröser, je kleiner die Differenz von $n - m$ ist, aber kleiner als o kann sie doch wohl nicht werden?

Je kleiner der Divisor ist, je öfterer ist er im Dividendus enthalten, ist er nun kleiner geworden, als jede Gröse, die sich angeben läßt, so muß offenbar auch der Quotient gröser geworden seyn, als jede Gröse, die sich angeben läßt. Das heißt mit andern Worten: der Divisor ist unendlich klein und der Quotient unendlich groß geworden, beyde also für uns nicht mehr bestimmbar. Also lassen sich für $n - m$, für x und y keine Werthe in endlichen Grösen mehr angeben, weil x und y Grösen geworden sind, die gröser als jede angebliche Gröse sind. Die Aufgabe ist also für $n - m$ unmöglich.

Setzen wir aber $m > n$, so können wir ja eigentlich $n - m$ nicht angeben, und daher ist auch dieser Fall unmöglich, wenn nämlich die Anwendung auf solche beson-

besondere Fälle gemacht wird, als die 3te und 7te Aufgabe enthält, sonst bleibt sie im abstrakto allerdings richtig; x und y sind nämlich alsdann negativ.

Aus besondern Anwendungen, die man von solchen abstrakten Aufgaben machen will, muß man zu beurtheilen wissen: ob der zu behandelnde Gegenstand solche willkührliche Bestimmungen, die man öfters macht, erlaubt, oder nicht. Z. B. so muß der Werth für x und y für solche Gegenstände, als die 24ste und 29ste Aufgabe enthalten, immer in ganzen Zahlen gefunden werden, auch müssen a und b nothwendig in solchen Fällen ganze Zahlen bedeuten, weil hier gewiß bloß von ganzen Schaafen die Rede seyn kann. Aber n und m können ganze Zahlen, auch Brüche seyn, nur würden im letztern Falle doch viele Ausnahmen Statt finden. Z. B. n darf weder als ganze Zahl, noch als Bruch kleiner denn m seyn, weil sonst n − m negativ würde, und daher auch x und y, welches in solchen Fällen aber nicht Statt finden kann. Ferner, wenn n ein Bruch seyn soll, so würde ich die Renner entweder = a, oder einen aliquoten (gleichen Theil) von a gleich nehmen, dieses gilt auch von m in Ansehung b, damit x und y ganze Zahlen würden; ich weiß wohl, daß dieses letztere nicht nothwendig ist, und daß auch andere Brüche für n und m gesetzt, ganze Zahlen für x und y geben können; allein ich wollte auch nur hier die leichtern Vorschriften geben. Es sey a = 40 und b = 30, soll nun n ein Bruch, m aber eine ganze Zahl seyn; so kann ich $n = \frac{c}{40}, \frac{c}{20}, \frac{c}{10}, \frac{c}{5}, \frac{c}{8}, \frac{c}{4}, \frac{c}{2}$ setzen.

Die Renner sind hier nämlich lauter Divisoren von a = 40. Der Zähler c muß allemal größer als sein Renner seyn, und zwar so, daß dieser Bruch > m wird, weil sonst n − m negativ würde.

Nun

Nun läßt sich in besondern Fällen sehr leicht bestimmen, wie groß er angenommen werden darf. Z B. da hier $a = 40$, $b = 30$, n soll $= \frac{c}{10}$ seyn, und m eine ganze Zahl, so ist

$$y = \frac{\left(\frac{c}{10} + 1\right) \cdot 40 + (m + 1)\, 30}{\frac{c}{10} - m.}$$

$$\text{oder } y = \frac{\left(\frac{c}{10} + 1\right) \cdot 400 + (m + 1) \cdot 300}{c - 10\, m}$$

$$\text{oder } y = \frac{[(c + 10)\, 2 + (m + 1) \cdot 15] \cdot 20}{c - 10\, m}$$

Hier sehe ich sogleich ein, daß ich für y gewiß eine ganze Zahl erhalte, wenn ich c so annehme, daß $c - 10m$ in 20 aufgeht. Wäre $m = 1$, so könnte c, 11, 12, 14, 15 und 20 seyn, weil alsdann $c - 10 = 1$, 2, 4, 5, 10 Zahlen wären, die in 20 aufgehen. Auf diese Art wäre es also leicht, Zahlen für besondere Fälle zu bestimmen. Doch ich bin vielleicht schon für manchen Anfänger unverständlich geworden, diesem rathe ich, diese Aufgabe zu überschlagen und sie ein anderes Mal zu lesen.

46ste Aufgabe.

Cajus spricht zu Titio: gieb mir $\frac{1}{3}$ von deinem Gelde und noch 3 fl., so habe ich dreymal so viel, als dir geblieben. Titius spricht: gieb mir von deinem die Hälfte nnd noch 2 fl., so habe ich neunmal so viel, als du. Wie viel hatte jeder?

Auflösung.

Cajus hatte x, Titius y, bekommt Cajus vom Titio $\frac{1}{3}$ und 3 fl., so hat er $x + \frac{y}{3} + 3$, und Titius behält $y - \frac{y}{3} - 3 = \frac{2y}{3} - 3$; weil nun letzteres $\frac{2y}{3} - 3$ dreymal genommen, ersterem gleich seyn soll, so ist

$$x + \frac{y}{3} + 3 = 3 \cdot \left(\frac{2y}{3} - 3\right)$$

oder A, $x + \frac{y}{3} + 3 = 2y - 9$.

Bekommt aber Titius vom Cajus die Hälfte seines Geldes und 2 fl., so hat er $y + \frac{x}{2} + 2$.

Cajus aber $\frac{x}{2} - 2$.

Wird dieses letztere 9mal genommen, so ist es $= \frac{9x}{2} - 18$, und dieses soll so viel sagen, als des Cajus seines $= y + \frac{x}{2} + 2$. Es ist also:

B, $y + \frac{x}{2} + 2 = \frac{9x}{2} - 18$,

hieraus folgt $y + 20 = 4x$,

folgl. $\frac{y}{4} + 5 = x$.

Die Gleichung A war

$$x + \frac{y}{3} + 3 = 2x - 9$$

folgl. $x = \frac{5 \cdot y}{3} - 12$.

vorhin fanden wir $x = \frac{y}{4} + 5$

Wenn nun zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich, daher:

$$\frac{5 \cdot y}{3} - 12 = \frac{y}{4} + 5$$

mithin $\frac{5 \cdot y}{3} - \frac{y}{4} = 17$

oder $17y = 3 \cdot 4 \cdot 17$.

folgl.

folgl. $y = 3.4 = 12.$
und $x = \frac{y}{4} + 5 = \frac{12}{4} + 5 = 8.$

47ste Aufgabe.

Ihrer drey verrichten ein Werk, wobey sie zusammen 120 Tagelohne verdienen, der erste bekommt täglich 20 kr., der andere 24, der dritte 30 kr. Es bekommt aber einer so viel als der andere. Wie viel Tage hat jeder gearbeitet?

Durch Raisonnement.

Da jeder gleich viel erhalten hat, so muß, wenn A $\frac{5}{6}$ Tage gearbeitet hat, B $\frac{5}{6}$ und C $\frac{4}{6}$ Tage gearbeitet haben; oder auch, wenn A 6 Tage gearbeitet, so muß B 5 und C 4 Tage gearbeitet haben. Da nun 15 Tage in 120 Tagen 8 mal enthalten sind, so hat A. 6 $8 = 48$; $B = 8.5 = 40$, und $C = 8.4 = 32$ Tage gearbeitet.

Algebraische Auflösung.

Der erste hat x Tage gearbeitet, bekommt also $20x$;
Der andere y, und bekommt $24y$.
Der dritte $120 - x - y$, bekommt also $(120 - x - y).30 = 3600 - 30x - 30y.$

Nun ist $20x = 24y$

folgl. $x = \frac{24}{20} y = \frac{6}{5} y.$

Ferner ist $24y = 3600 - 30x - 30y.$

Setzen wir nun in dieser Gleichung den so eben für x gefundenen Werth, so erhalten wir

$$24\,y = 3600 - \frac{30.\,6y}{5} - 30\,y$$

oder $24\,y = 3600 - 6.\,6y - 30\,y$

oder $24\,y = 3600 - 66\,y$

$90\,y = 3600$

folgl. $y = 40$.

Da nun $x = \frac{6.\,y}{5} = \frac{6.\,40}{5} = 48$ ist, so ist auch $120 - 48 - 40 = 32$ gleich den Tagen, die der dritte gearbeitet hat.

Probe.

Der erste Arbeiter erhält 48. 20 = 960 kr.
Der zweyte bekommt 40. 24 = 960 kr.
Der dritte erhält = 32. 30. = 960 kr.

$48 + 40 + 32 = 120$ Tage.

48ste Aufgabe.

Drey Arbeiter verdienen zusammen 120 Tagelohne, der erste bekömmt täglich 20 gr., der zweyte 24 gr., der dritte 30 gr.; es erhält aber einer so viel als der andere. Wie viel Tage hat ein jeder gearbeitet?

Auflösung.

Der erste x Tage, der zweyte y Tage, der dritte $(120 - x - y)$ Tage.

Man rechne aus, wie viel Groschen ein jeder in den bestimmten Tagen erhalten habe. Die gefundenen Resultate sind sich deswegen gleich, weil einer so viel als der andere bekommen soll.

Der

Der erste erhält in x Tagen = $20 . x$. gr.
Der zweyte erhält in y Tagen = $24 . y$. gr.
Der dritte erhält in $(120 . x - y)$ Tagen } = $(3600 - 30x - 30y)$ gr.

Da wir zwey unbekannte Größen eingeführt haben, so müssen wir auch zwey Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe machen.

$20x = 24y$; $20x = 3600 - 30x - 30y$
folglich $x = \frac{6}{5}y$; $50x = 3600 - 30y$
mithin $x = 72 - \frac{3}{5}y$

Es ist daher: $\frac{6}{5}\,y = 72\ \frac{3}{5}y$
also $\frac{9}{5}\,y = 72$
folglich $y = 40$ Tage
$x = \frac{6}{5}\,y = 48$ Tage.

Der dritte $120 - 48 - 40 = 32$ Tage.

Allgemein ließe sich diese Aufgabe also abfassen.

49ste Aufgabe.

Ihrer drey verrichten ein Werk, wobey sie zusammen A Tagelohn verdienen; der erste bekommt täglich a; der zweyte b; der dritte c. Es bekommt aber der eine so viel, als der andere. Wie viel bekommt ein jeder?

Auflösung.

Der erste habe x Tage gearbeitet, so bekommt er lohn $a\,x$.

Der zweyte y, so bekommt er $b\,y$ lohn;
so hat der dritte gearbeitet $(A - x - y)$ Tage; bekommt also an lohn $Ac - cx - cy$.

Da

Da nun der Lohn eines jeden gleich viel beträgt, so ist: $ax = by = Ac - cx - cy$.

Also, $ax = by$

folglich $x = \frac{by}{a}$

Diesen Werth von x in $Ac - cx - cy$ gesetzt, giebt

$$by = Ac - c \cdot \frac{by}{a} - cy$$

also: $aby = A \cdot ac - bcy - acy$

und $(ab + ac + bc)\, y = A \cdot ac$

folglich $y = \frac{A \cdot ac}{ab + ac + bc}$

und $x = \frac{A \cdot bc}{ab + ac + bc}$

In der 10ten Aufgabe war $A = 120$; $a = 20$, $b = 24$ und $c = 30$.

daher: $y = \frac{22\emptyset \cdot 20 \cdot 30}{2\emptyset\ 24 + 2\emptyset \cdot 3\emptyset + 24 \cdot 3\emptyset} = \frac{20 \cdot 3\overset{2}{\emptyset}}{15} = 40$

wie vorhin.

In Worten lautet die Formel für y so:

1) Man multiplizire das Tagelohn des ersten und zweyten, des ersten und dritten, und das Tagelohn des zweyten und dritten, und addire alle 3 Produkte zu einander.

2) Ferner multiplizire man die Anzahl von Tagelohnen mit dem Tagelohn des ersten und dritten.

3) Dividire No. 2. mit No. 1., so hat man y.

Hat man nun y gefunden, so findet sich $x = \frac{by}{a}$ sehr leicht durch eine simple Regeldetri, es ist $a : b = y : x$.

In

In Worten:

Zu dem Tagelohne des ersten, des zweyten und zu den Tagen, die der zweyte gearbeitet hat, suche man die vierte Proportionalzahl, so findet man x.

Z. B. $20 : 24 = 40 : \frac{2 \cdot 40 \cdot 24}{20} = 48$ Tage $= x$

Die Tage des dritten finden sich nun leicht aus $A - (x + y)$ das heißt:

Ich ziehe die Summe der Arbeitstage der beyden ersten von der sämmtlichen Anzahl der Arbeitstage ab, so finde ich die Tage des dritten.

Z. B. $120 - (40 + 48) = 120 - 88 = 32$ Tage.

Die allgemeine Formel für die Tage des dritten wäre diese:

$$A - \frac{A\,ac + A\,bc}{ab + ac + bc} = \frac{A\,a\,b}{ab + ac + bc}$$

Als Probe, ob diese 3 allgemeinen Formeln richtig sind, dient, daß man sie addirt, wo sie zusammengenommen A geben müssen;

nämlich: $\frac{A \cdot ac + Abc + Aab}{ab + ac + bc} = \frac{A\,(ac + bc + ab}{ab + ac + bc} = A$

Wäre $a = b$, so würde $y = x = \frac{A \cdot c}{b + 2c}$

und die Arbeitstage des dritten $= \frac{Ab}{b + 2c}$.

Wäre aber gar $a = b = c$

so wird $y = x =$ den Arbeitstagen des dritten $= \frac{A}{3}$, wie es auch wirklich seyn muß. Denn wenn ein jeder gleichen Tagelohn nach geendigter Arbeit ausgezahlt erhält, so müssen sie auch alle gleich lange gearbeitet haben.

50ste Aufgabe.

Ein Gelehrter, der geheime Künste verstehen will, wahrsagt zweyen Freunden, Acton und Bion, über die Dauer ihres Lebens, wie folgt:

Ihr brächtet euer Leben auf ein gleich hohes Alter, wenn es möglich wäre, daß Acton 4 Jahre länger lebte, als er, (wie ich voraus sehe), wirklich leben wird; dagegen Bion 4 Jahre weniger lebte, als wirklich sein Alter bringen wird.

Oder (um mich verständlicher zu machen): Bion würde noch einmal so alt werden, als Acton, wenn er seinem gesetzten Lebensziel noch 4 Jahre hinzuzuthun vermöchte, und wenn dagegen Acton noch von den bestimmten Jahren seines Lebens 4 Jahre abgäbe, oder um 4 Jahre früher vor seinem einmal gesetzten Lebensziel stürbe.

Wie alt wird nach diesen Reden wohl Acton und Bion werden? Sind Data genug vorhanden, um den Sinn des Wahrsagers bestimmt heraus zu bringen? — Die Auflösung antwortet: Ja!

Auflösung.

Actons Lebensjahre seyen = x
Bions " " = y

Dem ersten Theile der Rede des Gelehrten gemäß, muß

$$\frac{x + 4 = y - 4 \text{ seyn (A}}{+ 4 \text{ subtrahirt.}}$$

mithin: $x = y - 8$

Aber dem zweyten Theile der Rede des Wahrsagers gemäß, ist

$$\frac{\qquad\qquad}{} \quad 2 (x -$$

$$2(x-4) = y+4$$

oder $2x-8 = y+4$ (B

-8 subtr.

bleibt: $2x = y+12$

mit 2 dividirt.

mithin $x = \frac{y+12}{2}$

Demnach ist: $y-8 = \frac{y+12}{2}$.

mit 2 multipl.

giebt: $2y-16 = y+12$

-16 subtrah.

bleibt: $2y = y+28$

y subtr.

folglich: $y = 28$ Jahre,

und also: $x = y-8 = 20$ Jahre.

Es wird also Acton 20 Jahre und Bion 28 Jahre alt werden.

Anmerk. Man kann auch den Werth von $x = y-8$ in $2(x-4) = y+4$ substituiren und erhält $2(y-12) = y+4$, folgl. $y = 28$. und $x = y-8 = 20$.

Auflösung mit einer unbekannten Größe.

Wenn Acton nur x Jahre lebt, so muß der ersten Bedingung gemäß Bion $x+8$ Jahre leben.

Die zweyte Bedingung giebt demnach folgende Gleichung

$$2(x-4) = x+12$$

folgl. $x = 20$ Jahre

und $x+8 = 28$ Jahre.

Probe.

Wenn Acton 4 Jahre länger lebte, als er wirklich leben wird, so ist er alsdann:

$20+4 = 24$ Jahre alt.

Und

Und lebte Bion 4 Jahre weniger, als er wirklich leben wird, so würde er nur alt:

$28 - 4 = 24$ Jahre, also eben so alt alsdann, wie Acton.

Lebte Bion 4 Jahre noch länger, als er wirklich leben wird, so würde er

$28 + 4 = 32$ Jahre alt.

Lebte Acton aber 4 Jahre weniger, als er wirklich lebt, so wird er nur alt:

$20 - 4 = 16$ Jahre,
und 32 ist gleich 2 . 16.

Anmerk. Die erste Auflösung wird kürzer, wenn wir die Gleichung A von B abziehen.

Es war B) $2x - 8 = y + 4$
A) $x + 4 = y - 4$

$x - 12 = + 8$, folgl. $x = 20$.

Siehe Schüblers Versuch der Einrichtung unsers Erkenntnißvermögens durch Algebra nachzuspüren, Seite 138. §. 33.

51ste Aufgabe.

Ein Knabe sprach zum andern: hätte ich nur noch 9 rthlr. von deinem Gelde, so hätte ich siebenmal so viel, als du alsdann hättest. — Du bist unmäßig in deinen Wünschen, sprach der andere, gieb mir lieber 9 rthlr. von deinem Gelde, damit wir beyde gleich viel haben. Wie viel hatte wohl jeder Knabe?

Durch Raisonnement.

Der erste giebt dem zweyten 9 rthlr., und sie haben beyde gleich viel, nun giebt der zweyte dem ersten 18 rthlr., folglich hat der erste erstlich so viel als der zweyte, und noch zweymal 18 rthlr., oder 36 rthlr. mehr. Da nun überhaupt, der Aufgabe gemäß, der erste siebenmal so viel, als der zweyte hat, so muß nothwendig 36 jetzt sechsmal so viel seyn, als der zweyte hat, und folglich muß der zweyte, nachdem er 9 rthlr. weggegeben hat, 6 rthlr. übrig behalten, und also 15 rthlr. anfänglich gehabt haben.

Auflösung.

(Nach einer allgemeinen Formel).

Der erste Knabe hat x und der zweyte y gehabt, so ist nach der 45sten Aufgabe:

$$y = \frac{(n+1)\,a + (m+1)\,b}{n-m}$$

In unserer gegenwärtigen Aufgabe ist $a = b = 9$, $m = 1$, und $n = 7$; lassen wir a und n in der Formel stehen, und setzen nur für $m = 1$ einen Werth, so bekommen wir:

$$y = \frac{(n+3)\cdot a}{n-1}$$, für unsere Aufgabe ist daher

$$y = \frac{(7+3)\cdot 9}{7-5}\ 5 \cdot 3 = 15 \text{ rthlr.}$$

Aus der allgemeinen Formel für x in der 45sten Aufgabe folgt hier:

$$x = \frac{(3n+1)\,a}{n-1}$$, also für $a = 9$ und $n = 7$ ist

$$x = \frac{(3\cdot 7+1)\,9}{7-1} = 11 \cdot 3 = 33 \text{ rthlr.}$$

Probe

Probe.

Der erste hat 33 rthlr., erhält er also von dem zweyten noch 9 rthlr., so hat er 33 + 9 rthlr. = 7 . 6 rthlr., und der andere, der nur 15 rthlr. hat, behält nur 15 − 9 = 6 rthlr. Also hat jener wirklich um 7 mal so viel. Giebt aber der erste dem andern 9 rthlr., so bekommt der zweyte 15 + 9 = 24 rthlr., und der erste behält 33 − 9 = 24 rthlr., also hätten sie alsdann gleich viel, wie es seyn sollte.

Damit n − 1 positiv bleibe, so muß n > 1 seyn, folglich ist x immer größer als y, und $x - y$ ist =

$$= \frac{(3n+1)a}{n-1} - \frac{(n+3)a}{n-1} = \frac{(3n+1)}{n-1} - \frac{(n+3)a}{n-1}$$

$$= \frac{(2n-2)a}{n-1} = \frac{(n-1)2a}{n-1} = 2a.$$

Weiß ich also y, so findet sich x, wenn ich 2a addire; weiß ich aber x, so findet sich y, wenn ich 2a subtrahire.

In unserer Aufgabe war a = 9 und y = 15, also findet sich $x = 15 + 2 . 9 = 33$, wie vorhin.

Wäre n = 2, so wird y = 5a und $x = 7a$.

Dieses sind allgemeine Formeln für solche Aufgaben, als die 7te ist. Dort ist nämlich a = 1 und also y = 5 und $x = 7$.

Man ist demnach durch solche allgemeine Formeln in den Stand gesetzt, selbst eine Menge Aufgaben zu erfinden. Gesetzt, in der 29sten Aufgabe sollte sich ein jeder 7 Schaafe geben, und die übrigen Bedingungen sollten bleiben, so ist

$y = 5 . 7 = 35$ und $x = 7 . 7 = 49$.

52ste Aufgabe.

Es hat jemand 2 Stück Land, das eine Stück ist 8 mal größer, als das andere, und zieht man die Ackerzahl des kleinern von der des größern ab, so ist der Unterschied 21 Acker. Wie groß ist ein jedes?

Durch Raisonnement.

Das größere Land ist so groß wie das kleinere, nebst 21; da nun, der Aufgabe gemäß, 21 gerade 7 mal so viel, als das kleinere ist, so ist $\frac{21}{7} = 3$ das kleinere.

Algebraische Auflösung.

Das erste, das größere, sey x, und das andere y Acker groß, so ist:

$$x = 8y; \text{ und } x - y = 21$$

folgl. $x = 21 + y$.

Daher $8y = 21 + y$
und also $7y = 21$
mithin $y = \frac{21}{7} = 3$ Acker,
und also $x = 8 . 3 = 24$ Acker.

Auflösung mit einer unbekannten Größe.

Das kleinere Stück sey y Morgen, so enthält das größere $8y$.

Beding. $8y - y = 21$
folgl. $y = 3$
und $8y = 24$.

Folgende Aufgabe ist der allgemeine Vortrag von dieser.

53ste Aufgabe.

Aus der gegebenen Differenz und dem Quotienten zweyer Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die beyden gesuchten Zahlen sollen seyn x und y, die Differenz $= d$ und der Quotient $= q$; so ist

$$1)\ x - y = d, \text{ und } \frac{x}{y} = q$$

$$\text{daher } x = q.\ y.$$

Diesen Werth von x in No. 1. gesetzt, giebt

$$qy - y = d \text{ oder } (q - 1)\ y = d,$$

$$\text{folgl. } y = \frac{d}{q - 1};$$

$$\text{mithin } x = q.\ \frac{d}{q - 1}.$$

In der vorhergehenden Aufgabe war $d = 21$; und $q = 8$, hiernach ist also $y = \frac{21}{8-1} = 3$, und $x = 8.\ y = 8.\ 3 = 24$, wie vorhin.

Regel. Die kleinste Zahl wird gefunden, wenn man die Differenz mit dem um Eins verminderten Quotienten dividirt.

Die größte Zahl wird gefunden,

wenn die gefundene kleinere Zahl mit dem Quotienten multiplizirt wird.

Wollte ich aber die größte Zahl finden, ohne vorher die kleinere zu berechnen, so muß ich das Produkt aus dem Quotienten in der Differenz durch den um Eins verminderten Quotienten dividiren.

54ste Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe und dem Quotienten zweyer Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Durch Raisonnement.

Wenn die gegebene Summe gleich S, und der Quotient gleich q ist, so folgt, daß die größere Zahl die kleinere 9 mal enthält; die Summe muß daher die kleinere $(q + 1)$ mal enthalten; folglich ist die kleinere $= \frac{S}{q+1}$ und die größere $= q \cdot \frac{S}{q+1}$.

Algebraische Auflösung.

Die Summe beyder Zahlen sey gleich S, der Quotient $= q$, und die beyden gesuchten Zahlen gleich x und y, so ist: $x + y = s$ und $\frac{x}{y} = q$

$$\text{also } x = q \cdot y.$$

Diesen Werth für x setzen wir in der Gleichung für S, so erhalten wir: $qy + y = S$

$$\text{oder } (q + 1)\, y = S$$

$$\text{folgl. } y = \frac{S}{q+1}.$$

$$\text{mithin } x = 9 \cdot \frac{S}{9+1}.$$

Regel. Die kleinste Zahl zu finden:

Man dividire die Summe durch den um Eins vermehrten Quotienten.

Die größte Zahl zu finden, wenn die kleine bereits gefunden ist:

Man multiplizire die kleinere Zahl durch den Quotienten.

Die größte Zahl zu finden, ohne die kleinere vorher zu wissen: Man

Man dividire das Produkt des Quotienten in der Summe, durch den um Eins vermehrten Quotienten.

Z. B. $s = 21$; $y = 6$; so ist $= y = \frac{21}{6+1} = 3$, und $x = 6.\ 3 = \frac{6.21}{6+1} = 18$.

55te Aufgabe.

Es sey die Summe zweyer Zahlen $= 8$, und die Differenz ihrer Quadrate $= 16$; was sind es für Zahlen?

Erste Auflösung.

Erste Zahl $= x$; andere $= y$; so ist $x + y = 8$ und hieraus findet sich $x = 8 - y$ Es ist ferner $x^2 - y^2 = 16$, und also $x^2 = 16 + y^2$; vorhin war $x = 8 - y$, hier ist also $x^2 = 64 - 16y + y^2$;

mithin $64 - 16y + y^2 = 16 + y^2$

oder $64 - 16y = 16$ — mit 16 dividirt.

$4 - y = 1$ — $+ y$ addirt.

$4 = 1 + y$ — $+ 1$ subtrah.

folgl. $3 = y$; mithin $x = 8 - y = 8 - 3 = 5$.

Probe.

$x + y = 5 + 3 = 8$, und $x^2 = y^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.

Zweyte Auflösung.

Es ist $x^2 - y^2 = 16$

oder $(x + y)(x - y) = 16$.

Nun

Nun war $x + y = 8$, setzen wir diesen Werth in die vorige Gleichung, so ist $8 (x - y) = 16$.

Daher $x - y = 2$.

Also die Summe beyder Zahlen $= 8$ und die Differenz $= 2$, daher die größte Zahl $= \frac{8}{2} + \frac{2}{2} = 5$, und die kleinere $\frac{8}{2} - \frac{2}{2} = 3$.

Dritte Auflösung.

Man nenne die Differenz beyder Zahlen z; so ist die größte der gesuchten Zahlen $= 4 + \frac{z}{2}$, und die kleinste $= 4 - \frac{z}{2}$, daher die Differenz der Quadrate $= (4 + \frac{z}{2})\,2 - (4 - \frac{z}{2})\,2 = 16$; oder $8z = 16$ und daher $z = 2$; mithin die größte Zahl $= 4 + \frac{z}{2} = 5$ und die kleinste $= 4\,\frac{z}{2} = 3$.

Wer eine arithmetische Auflösung dieser Aufgabe versucht, wird finden, daß die algebraische Auflösung in jedem Betracht den Vorzug verdient.

56ste Aufgabe.

Es sey die Summe zweyer Zahlen gleich s, und die Differenz ihrer Quadrate $= d$; man soll diese Zahl finden.

Auflösung.

Die größte Zahl sey x, und die kleinste y; so ist:

$$x^2 - y^2 = d$$

oder $(x + y)(x - y) = d$

aber $x + y$ ist gleich s

daher $s (x - y) = d$

und $x - y = \frac{d}{s}$.

Zweyte Auflösung.

Es sey s die Differenz der gesuchten zwey Zahlen,

so ist $x = \frac{s + \delta}{2}$

und $y = \frac{s - \delta}{2}$

also $\left(\frac{s+\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{s-\delta}{2}\right)^2 = d\ s \cdot \delta = d$

folgl. $\delta = \frac{d}{s}$

Da nun die Summe und die Differenz beyder Zahlen bekannt ist, so kann man die Zahlen selbst sehr leicht finden.

Es ist nämlich $x = \frac{s}{d} + \frac{d}{2s}$, und $y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2s}$

Probe.

$$x + y = \left(\frac{s}{2} + \frac{d}{2s}\right) + \left(\frac{s}{2} - \frac{d}{2s}\right) = s,$$

und $x^2 - y^2 = \left(\frac{s}{2} + \frac{d}{2s}\right)^2 - \left(\frac{s}{2} - \frac{d}{2s}\right)^2 = d.$

In der vorhergehenden Aufgabe war $s = 8$, $d = 16$; also $x = \frac{8}{2} + \frac{16}{2.8} = 5$, und $y = \frac{8}{2} - \frac{16}{2.8} = 3$, wie vorhin.

Regel. Ich suche erst die Differenz beyder Zahlen, wie folget:

Man dividire die Differenz der Quadrate mit der Summe. Addire ich nun die halbe Differenz zur halben Summe, so erhalte ich die größte Zahl. Subtrahire ich die halbe Differenz von der halben Summe, so bekomme ich die kleinere Zahl.

57ste Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, daß, wenn man zum dritten Theile der größern die Hälfte der kleinern addirt, 8 kommen; und wenn man vom 5ten Theil der größern den 3ten Theil der kleinern subtrahirt, 1 komme.

Durch Raisonnement.

Da die größere Zahl aus der kleinern in dem Unterschiede besteht, so erhellet aus dem ersten Theil der Aufgabe, daß $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ der kleinern nebst $\frac{1}{3}$ des Unterschiedes gleich 8 ist; man sieht also deutlich, daß es nur darauf ankomme, zu bestimmen, was für ein Theil $\frac{1}{3}$ des Unterschiedes von der kleinern nebst 1, gleich ist $\frac{1}{5}$ der kleinern nebst $\frac{1}{5}$ des Unterschiedes, oder $\frac{5}{15}$ der kleinern nebst 1 gleich ist $\frac{3}{15}$ der kleinern nebst $\frac{3}{15}$ des Unterschiedes, also auch $\frac{3}{15}$ des Unterschiedes gleich $\frac{2}{9}$ der kleinern nebst $\frac{5}{3}$. So findet man nun leicht, daß $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{9}$, das heißt $\frac{19}{18}$ der kleinern nebst $\frac{5}{3}$ gleich 8 oder gleich $\frac{24}{3}$ ist, und folglich ist $\frac{12}{18}$ der kleinern gleich $\frac{19}{3}$ und also $\frac{3}{18}$ oder $\frac{1}{6}$ der kleinern gleich $\frac{3}{3} = 1$, mithin die kleinere selbst gleich 6.

Algebraische Auflösung.

Große Zahl $= x$; kleine $= y$.

A: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8$; B, $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$.

Man multiplizire die Gleichung A mit 6, und die Gleichung B mit 10, so erhalten wir aus A:

$2x + 3y = 48$, und aus B erhalten wir

$2x - \frac{10y}{3} = 10$

subtrahire

$3x + \frac{10}{3}y = 38$;

oder $19y = 3 \cdot 38$,

folgl. $y = \frac{3 \cdot 38}{19} = 3 \cdot 2 = 6$.

Da $2x + 3y = 48$,

so ist $2x = 48 - 3y$

und $x = 24 - \frac{3y}{2}$.

Da nun $y = 6$ ist,

so ist $x = 24 - \frac{3 \cdot 6}{2} = 15$.

Probe.

$\frac{15}{3} + \frac{6}{2} = 8$ und $\frac{15}{5} - \frac{6}{3} = 1$.

58ste Aufgabe.

Ein Knabe will Aepfel und Birnen kaufen; es kosten aber 10 Aepfel 2 gr., und 25 Birnen 4 gr. Wie viel muß er von jeder Gattung nehmen, daß es für 100 Stück gerade 19 gr. ausmacht?

Durch Raisonnement.

Da ein Apfel $\frac{1}{25}$ gr. mehr kostet, als eine Birne, so kosten 25 Aepfel gerade 1 gr. mehr, als 25 Birnen; wären es nun 100 Birnen gewesen, die er gekauft hätte, so würde er nicht 19 gr., sondern nur 16 gr., also 3 gr. weniger zu bezahlen nöthig gehabt haben; er muß daher nothwendig 3 mal $25 = 75$ Aepfel und 25 Birnen kaufen.

Algebraische Auflösung.

x Aepfel und y Birnen.

10 Aepfel kosten 2 gr., daher kosten x Aepfel $\frac{2x}{10} = \frac{1}{5}x$ gr.

25 Birnen kosten 4 gr., also kosten y Birnen $\frac{4y}{25}$ gr.

Nun muß den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$$\frac{x}{5} + \frac{4y}{25} = 19,$$

und $x + y = 100$, mult. wie die obere Gleich. mit 5,

so ist $x + \frac{4}{5}y = 95$, subtrah. von der untern Gleichung.

also $\frac{1}{5}y = 5$,

folgl. $y = 25$ Stück.

Da nun $x + y = 100$,

so ist $x = 100 - y$,

also hier $x = 100 - 25 = 75$ Stück.

Probe.

10 Aepfel kosten 2 gr.; also kosten 75 St. $\frac{75 \cdot 2}{10} = 15$ gr.
23 Birnen kosten 4 gr.; mith. kost. 25 — = = 4 gr.

Summa 100 St. kosten also 19 gr.

59ste Aufgabe.

Man dingt einen Arbeiter auf 30 Tage. Wenn er arbeitet, bekommt er 7 gr. Lohn, wenn er aber feyert, so werden ihm zur Strafe 5 gr. abgezogen. Da nun die 30 Tage verflossen waren, so fand sichs, daß er nichts zu fordern hatte. Wie oft hat er gefeyert, und wie oft gearbeitet?

Auflösung.

y Feyertage, und x Arbeitstage

Der Aufgabe gemäß ist $x + y = 30$,
in x Arbeitstagen hat er verdient $7x$ gr.
wegen y Feyertage ist ihm abgezogen $5y$ gr.

laut

laut der Bedingung ist $7x = 5y$.

folgl. $x = \frac{5 \cdot y}{7}$.

Diesen Werth von x setzen wir in die erste Gleichung, so kömmt

$$\frac{5 \cdot y}{7} + y = 30$$

oder $5y + 7y = 210$

oder $12y = 210$

folgl. $y = 17\frac{1}{2}$ Feyertage.

mithin $x = \frac{5 \cdot y}{7} = \frac{5 \cdot 17\frac{1}{2}}{7} = \frac{87\frac{1}{2}}{7} = 12\frac{1}{2}$ Arbeitstage.

Probe.

$12\frac{1}{2}$ Arbeitstage à 7 gr. Lohn, macht 3 rthlr. 15 gr. 6 pf.
$17\frac{1}{2}$ Feyertage à 5 gr. tägl. Abz., macht 3 rthlr. 15 gr. 6 pf.

60ste Aufgabe.

Man dingt einen Arbeiter c Tage, mit der Bedingung, wenn er arbeitet, bekommt er a gr. Lohn, wenn er aber feyert, so werden ihm zur Strafe b gr. abgezogen. Da nun die c Tage verflossen waren, so fand sichs, daß er nichts zu fordern hatte. Wie oft hat er gefeyert, und wie oft gearbeitet?

Auflösung.

x Arbeitstage und y Feyertage.

Der Bedingung gemäß muß $x + y = c$ seyn.

Ferner muß der Arbeiter in x Arbeitstagen erhalten
$a \cdot x$ gr.
und für y Feyertage muß ihm abgezogen werden $b \cdot y$ gr.

Der

Der Aufgabe gemäß muß $ax = by$ seyn,
oder $ax - by = o$ } Beyde Gleichungen add.
da $x + y = c$, so ist auch $bx + by = bc$ }

giebt $ax + by = bc$.

oder $(a + b)\,x = bc$

folglich $x = \frac{bc}{a+b}$

Es war $ax = by$

mithin $\frac{ax}{b} = y$; daher auch $y = \frac{ac}{a+b}$

In der vorhergehenden Aufgabe war $a = 7$, $b = 5$ und $c = 30$.

Dieses giebt: $x = \frac{5 \cdot 30}{7+5} = 12\frac{1}{2}$ und $y = \frac{7 \cdot 30}{7+5} = 17\frac{1}{2}$

Ohne alle Einkleidung würde diese Aufgabe also vorgetragen werden.

61ste Aufgabe.

Man soll eine Zahl c in zwey Theile theilen, daß, wenn ein Theil mit a, der andere mit b multiplizirt würde, gleiche Produkte entstehen.

Wären x und y die gesuchten Theile, so fänden wir, wie bey der vorhergehenden Aufgabe,

$$x = \frac{bc}{a+b} \text{ und } y = \frac{ac}{a+b}$$

Auch hier findet eine Probe statt. Es muß nämlich laut der Aufgabe $a \cdot \frac{bc}{a+b} = b \cdot \frac{ac}{a+b}$ seyn,

ferner muß $\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{a+b} = \frac{(b+a)c}{a+b} = c$ seyn.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe stehet im ersten Theil dieser Sammlung Seite 140. Aufg. 100.

Regel.

Regel. Ein Theil wird gefunden:

Wenn man die zu theilende Zahl mit dem einen Faktor multiplizirt, und dieses Produkt mit der Summe der Faktoren dividirt.

62ste Aufgabe.

Zwey Kaufleute haben ein Kapital von 11000 rthlr. zusammengelegt. Nach Verlauf einiger Zeit haben beyde gleichviel gewonnen, und der Gewinnst des ersten ist 4mal so groß, als seine eingelegte Summe, der Gewinnst des zweyten aber 7mal so groß, als seine eingelegte Summe. Wie viel hat jeder eingelegt?

Auflösung.

Ueberdenken wir die Aufgabe gehörig, so nehmen wir sogleich gewahr, daß das Kapital 11000 rthlr. $= c$, dergestalt in zwey Theile getheilt werden muß, daß, wenn der eine Theil mit $4 = a$, und der andere mit $7 = b$ multiplizirt wird, diese Produkte einander gleich werden.

Es ist also nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$x = \frac{b\,c}{a+b} \text{ und } y = \frac{a\,c}{a+b};$$

Für diesen Fall also $x = \frac{7 \cdot 11000}{4+7} = 7000$ rthlr.

und $y = \frac{A \cdot 11000}{4+7} = 4000$ rthlr.

Eine dergleichen Aufgaben stehet auch schon im ersten Theile dieser Sammlung Seite 37, dort ist $a = 3$, $b = 5$, $c = 1800$, also der eine Theil $= \frac{3 \cdot 1800}{3+5}$

und

und der andere $= \frac{5 \cdot 1800}{3 + 5}$. Auch die Aufgabe des ersten Theils Seite 38. gehört hieher.

63ste Aufgabe.

Ein Meister hatte mit einem Gesellen den Kontrakt geschlossen: daß er ihm für jeden Tag, wo er arbeiten könnte, außer der Kost noch 8 gr. geben wollte; für jeden Tag aber, wo er nicht arbeiten würde, 2 gr. für die Kost bezahlt haben wollte. Als der Meister nach Verlauf von 15 Tagen seinem Gesellen 3 rthlr. ausgezahlt hatte, so sagt dieser zu seinem Freunde, daß der Meister ihm 8 gr. zu wenig gegeben hätte; denn wenn er gleich nicht mehr wisse, wie viel Tage er eigentlich gearbeitet, so habe er doch immer von einem Tage zum andern in Gedanken behalten, wie viel ihm der Meister noch schuldig sey. Wie viel Tage hatte der Geselle gearbeitet?

Erste Auflösung.

Der Geselle soll x Tage gearbeitet, und y Tage nicht gearbeitet haben. Er erhält also für x Tage, die er gearbeitet, $8x$ gr.

Für y Tage, die er nicht gearbeitet hat, werden ihm $2y$ gr. abgezogen.

Den Bedingungen der Aufgabe gemäß, haben wir folgende zwey Gleichungen:

$x + y = 15$ und $8x - 2y = 72$ gr. $+ 8$ gr. $= 80$.

Folg=

Folglich: $y = 15 - x$ oder $2y - 8x = -80$

$2y = 8x - 80$

mithin $y = 4x - 40$

Da nun auch $y = 15 - x$

---

so ist: $4x - 40 = 15 - x$

und $5x = 55$

folglich: $x = 11$ Tage, die er gearbeit.

mithin $15 - x = 4$ Tage, die er gefeyert.

Zweyte Auflösung.

Mit einer unbekannten Größe.

x Tage habe er gearbeitet, also $15 - x$ Tage nicht gearbeitet.

Demnach

$$8x - (30 - 2x) = 80$$
$$10x - 30 = 80$$
$$x - 3 = 8$$
$$x = 11 \text{ Tage, die er nicht gearbeitet}$$

und $15 - x = 4$ Tage gefeyert.

Probe.

11 Tage à 8 gr.	Lohn beträgt	88 gr.
4 Tage à 2 gr.	Abzug beträgt	8 gr.
	Rest	80 gr.

So viel hätte der Meister ihm geben sollen, allein er gab ihm nur 72 Groschen, also 8 zu wenig.

64ste Aufgabe.

Es hat jemand zwey Becher sammt einem Deckel, der 18 rthlr. werth ist. Wird der Deckel auf den ersten Becher gesetzt, so ist er noch einmal

so

so viel werth, als der andere; wird er aber auf den andern gesetzt, so ist er $\frac{1}{4}$ mehr werth als der erstere. Wie viel ist jeder werth?

Durch Raisonnement.

Aus dem ersten Theile der Aufgabe ergiebt sich, daß der Werth des zweyten Bechers in der Hälfte des Werthes vom ersten Becher nebst 9 rthlr. bestehet, legt man nun zu dem zweyten Becher noch 18 rthlr. Werth hinzu, so besteht der Werth vom zweyten Becher in der Hälfte des Werthes vom ersten Becher nebst 27 rthlr.; theilt man nun nach dem zweyten Theile der Aufgabe den Werth von dem ersten Becher in 4 gleiche Theile, so enthält der Werth vom zweyten Becher überhaupt 5, und also 27 rthlr., 3 solcher gleichen Theile; man braucht also nur 27 durch 3 zu dividiren, um $\frac{1}{4}$ des Werthes vom ersten Becher zu erhalten — demnach der Werth des ersten Bechers = 36 rthlr., der Werth des zweyten Bechers = 27 rthlr.

Algebraische Auflösung.

Der erste sey werth x, der zweyte y; wird der Deckel auf den ersten gesetzt, so ist er $x + 18$ werth, folglich $x + 18 = 2y$; wird er auf den andern gesetzt, so ist er werth $y + 18$, folglich $y + 18 = \frac{5}{4}x$.

Also $x + 18 = 2y$

und $\frac{x}{2} + 9 = y$

Es ist aber $\frac{5}{4}x = y + 18$ die obere von der untern Gleichung abgezogen, giebt: $\frac{3}{4}x - 9 = 18$

und $\frac{3}{4}x = 27$

folglich: $x = \frac{5 \cdot 27}{3} = 4 \cdot 9 = 36$

demnach $y = 9 + \frac{x}{2} = 9 + 18 = 27$.

Probe.

Probe.

$$36 + 18 = 54 = 2 \cdot 27$$
$$\text{und} \quad 27 + 18 = 45 = 36 + \tfrac{36}{4}.$$

65ste Aufgabe.

Zwey Städte liegen c Meilen weit von einander; davon gehen zwey Boten, A und B, zu gleicher Zeit gegen einander aus, und kommen in b Tagen zusammen. Wenn nun B täglich a Meilen weiter gegangen, als A, so frägt sichs, wie viele Meilen jeder täglich zurückgelegt habe?

Auflösung.

$x =$ dem Weg des A, und $y =$ dem Weg des B, den ein jeder in b Tagen zurück gelegt hat.

Also ist hier $y + x = c$, die Summe zweyer Größen; $y - x =$ dem Weg, den B in b Tagen mehr macht, als A, da er täglich a Meilen weiter gegangen ist, als A. Daher ist $y - x = ab$, gleich der Differenz zweyer Größen. Demnach ist:

$$y = \frac{c + ab}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{c - ab}{2}$$

B hat täglich $\frac{y}{b} = \frac{c + ab}{2b}$ Meilen, und

A hat täglich $\frac{x}{b} = \frac{c - ab}{2b}$ Meilen zurückgelegt.

Im ersten Theile dieser Sammlung, Seite 250. Aufgabe 231.

ist $c = 100$, $b = 8$; $a = 1\frac{1}{2}$ Meile.

also $\frac{y}{b} = \frac{100 + 8 \cdot 1\frac{1}{2}}{2 \cdot 8} = \frac{100 + 12}{2 \cdot 8} = 7$ Meilen

und daher $\frac{x}{b} = 7 - 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$ Meile.

Die gewöhnliche Auflösung dieser Aufgabe ist so, wie sie im ersten Theil Seite 250. Aufg. 231. beschrieben ist. Die hier gegebene Auflösung hat den Vorzug vor jener, daß sie übersehen läßt, wie jemand ohne Anwendung der Algebra mit Ueberzeugung diese Aufgabe auflösen würde. Er wird so schließen: (man habe im ersten Theil die 231ste Aufgabe vor Augen). Beyder Boten Weg macht 100 Meilen, B aber macht offenbar $8 \cdot 1\frac{1}{2} = 12$ mehr als A. Nun weiß er, daß die halbe Summe plus der halben Differenz die größere, und die halbe Summe minus der halben Differenz die kleinere Zahl giebt, also der Weg des A $= \frac{100}{2} - \frac{12}{2} = 44$ Meilen, und des B $\frac{100}{2} + \frac{12}{2} = 56$. A legt also täglich $\frac{44}{8} = 5\frac{1}{2}$ Meile, und B täglich $\frac{56}{8} = 7$ Meilen zurück.

66ste Aufgabe.

Zwey Wasserröhren haben ein Gefäß von a Eimer mit Wasser angefüllt, indem die erste b Stunden, und die zweyte c Stunden geflossen ist. Ein anderes Mal haben eben diese zwey Röhren ein Behältniß von d Eimer angefüllt, da die erste f, und die andere g Stunden geflossen ist. Wie viel Stunden werden beyde miteinander fliessen müssen, damit sie ein Behältniß von h Eimer anfüllen?

Auflö-

Auflösung.

Hier sieht man leicht ein, daß es nur auf die Menge Wasser ankömmt, so jede Röhre in einer Stunde giebt. Es sey darum die Menge Wasser, so die erste Röhre in einer Stunde giebt $= x$ Eimer, so giebt sie in b Stunden bx, und in f Stunden fx Eimer. Die Menge Wasser, so die zweyte Röhre in einer Stunde giebt, sey $= y$, so giebt sie in c Stunden cy, und in g Stunden gy Eimer. Es ist demnach:

$$bx + cy = a, \quad \text{und} \quad fx + gy = d$$

daher $bgx + cgy = ag$ und $cfx + cgy = cd$

von $cfx + cgy = cd$

abgezogen $bgx + cgy = ag$

bleibt: $(cf - bg)x = cd - ag$

folglich $$x = \frac{cd - ag}{cf - bg}$$

oder $$= \frac{\frac{d}{g} - \frac{a}{c}}{\frac{f}{g} - \frac{b}{c}}$$

Da $bx + cy = a$

so ist $cy = a - bx$

und $$y = \frac{a - bx}{c} = a - \left(\frac{bcd - abg}{cf - bg}\right) = \frac{}{c}$$

$$= \frac{acf - bcd}{c(cf - bg)} = \frac{af - bd}{cf - bg} = \frac{\frac{a}{b} - \frac{d}{f}}{\frac{c}{b} - \frac{g}{f}}$$

Es sey a = 21 Eimer, d = 15 Eimer, h = 100 Eimer, b = 2 St, c = 3 St., f = 7 St. und g = 6 Stunden; also:

$$x = \frac{7 \cdot 51 - 21 \cdot 6}{7 \cdot 7 - 2 \cdot 42} = \frac{51 - 42}{7 - 4} = \frac{9}{3} = 3 \text{ Eimer}$$

$$y = \frac{a - bx}{c} = \frac{21 - 2 \cdot 7}{7} = 5 \text{ Eimer.}$$

Beyde Röhren geben also zusammen $3 + 5 = 8$ Eimer in einer Stunde; folglich brauchen sie um 100 Eimer zu füllen $\frac{100}{8} = 12\frac{1}{2}$ Stunde. Setzen wir $a = 22$, $d = 31$, $h = 100$ $b = 6$, $c = 4$, $f = 9$, $g = 7$, so ist $x = 5$ und $y = -2$, welches anzeigt, daß die eine Röhre jede Stunde 5 Eimer in das Gefäß schüttet, aus welchem durch die andere Röhre stündlich 2 Eimer fließen.

Durch Raisonnement.

Aus der Angabe folgt einmal: daß, wenn die erste Röhre 1 Stunde und die zweyte Röhre $\frac{c}{b}$ Stunden geflossen, $\frac{a}{b}$ Eimer gefüllt worden sind; und zweytens: daß wenn die erste Röhre 1 Stunde und die zweyte $\frac{g}{f}$ Stunden geflossen, $\frac{d}{f}$ Eimer gefüllt worden sind. In $\left(\frac{c}{b} - \frac{g}{f}\right)$ Stunden werden also $\left(\frac{a}{b} - \frac{d}{f}\right)$ Eimer gefüllt. Folglich werden in einer Stunde von der zweyten Röhre gefüllt

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{d}{f}}{\frac{c}{b} - \frac{g}{f}} \text{ Eimer.}$$

Durch

Durch ein ähnliches Raisonnement finden wir, daß von der ersten Röhre in 1 Stunde $\frac{\frac{d}{g} - \frac{a}{c}}{\frac{f}{g} - \frac{b}{c}}$ Eimer gefüllt werden.

Ich habe hier nur für x und y Formeln gesucht, welche bloß die Menge Wasser bestimmen, so jede Röhre in einer Stunde liefert. Nun kann man aber leicht angeben, in wie viel Stunden sie beyde h Eimer geben, nämlich in $\frac{h}{x+y}$ Stunden. Man könnte freylich für diesen Ausdruck auch sehr leicht die allgemeine Formel angeben; allein man gewinnt bey der Ausübung nichts, indem man auf vorhin gezeigte Art eben so geschwind das Verlangte findet.

67ste Aufgabe.

Es hat jemand zwey Sorten Wein; von der Sorte A kostet das Maaß a, und von der geringern Sorte B gilt das Maaß b. Er will beyde Sorten so vermischen, daß das Maaß von dem vermischten Weine für c, für einen Preis, der (wie es sich auch schon von selbst versteht) zwischen a und b fällt, gegeben werden könne. Wie viel muß demnach von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung.

Man setze: von der Sorte A werde zu 1 Maaß x, und von der Sorte B werde y genommen, so ist:

x +

$$x + y = 1$$

Um die nachfolgende Gleichung zu finden, suche man, was x und y kosten.

Der Werth von x ist ax
Der Werth von y ist by.

Da nun der Theil x von 1 Maaße, ax, und der andere Theil von demselben, y, by gilt, so kostet das ganze Maaß vom vermischten Weine $ax + by$; und also ist: $c = ax + by$. Es war $x + y = 1$, daher ist auch $b = bx + by$

subtrahirt.

giebt $c - b = (a - b)\,x$

folglich $\frac{c - b}{a - b} = x$

Da nun $x + y = 1$, so ist $y = 1 - x = 1 - \frac{c - b}{a - b} = \frac{a - b - (c - b)}{a - b} = \frac{a - c}{a - b}$

Regel.

1) Subtrahire den mittlern Preis von dem höchsten;

2) den geringsten von dem mittlern; und

3) den geringsten von dem höchsten.

4) Die erste und zweyte Differenz dividire mit der dritten; der erste Quotient zeigt, wie viel von der geringen, und der zweyte Quotient, wie viel von der guten Sorte genommen werden müsse.

z. B. $a = 24$ so ist $a - c = 6$ und also $\frac{a-c}{a-b} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$c = 18$ $\quad c - b = 3$

$b = 15$ $\quad a - b = 9$ $\quad \frac{c-b}{a-b} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Von der geringen Sorte muß also $\frac{2}{3}$ und von der guten $\frac{1}{3}$ genommen werden.

Nähme man, statt des schlechten Weines, Wasser, so würde $b = o$ und die Menge des Wassers oder $y = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$ und $x = \frac{c}{a}$, in unserm gegebenen Beyspiele wäre also alsdann $x = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ und $y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe stehet im ersten Theile dieser Sammlung, Seite 53.

Es verhält sich $x : y = \frac{c-b}{a-b} : \frac{a-c}{a-b} = c - b : a - c$.

Auf dieses Verhältniß gründet sich folgende Vorschrift, die man in Rechenbüchern meistens ohne Beweis findet.

Schreibe den bessern und schlechtern Preis unter einander, und den verlangten mittlern Preis zur Linken. Zur Rechten setze bey dem bessern Preis den Unterschied des schlechtern vom mittlern, und beym schlechten Preis den Unterschied des bessern vom mittlern; so zeigen diese Differenzen das Verhältniß der Theile an, welches man suchte.

Das Schema dieser Regel in Buchstaben und Zahlen ausgedrückt, wäre folgendes:

	a	c − b	24	3
c			18	
	b	a − c	15	6

also verhielte sich:

$x : y = c - b : a - c$ in Zahlen wie $3 : 6 = 1 : 2$

das heißt: auf c – b Theile des guten Weins muß man a – c Theile des schlechten Weins in Zahlen nehmen, auf 1 Theil guten muß man 2 Theile schlechten rechnen. Wenn aber dieses Verhältniß gefunden ist, so hat das Uebrige keine Schwierigkeit. Denn da man 1 Theil von dem guten und 2 Theile von dem schlechten nehmen soll, so erhält man überhaupt 3 Theile in der Mischung; also enthält 1 Maaß von dem gemischten Weine 3 Theile, nämlich $\frac{1}{3}$ guten und $\frac{2}{3}$ schlechten Wein.

Allgemein. Da man zu der Mischung c – b Theile des guten und a – c des schlechten Weins nimmt, so enthält die Mischung überhaupt (c – b) + (a – c) = (a – b) Theile. Theilt man daher das Ganze in (a – b) Theile, so muß man (c – b) solcher Theile vom guten, und (a – c) solcher Theile vom schlechten Wein nehmen, dieses giebt, wie vorhin, $x = \frac{c-b}{a-b}$ und $y = \frac{a-c}{a-b}$.

Daß eben diese Aufgabe auch auf andere zu vermischende Dinge angewandt werden könne, wird man leicht einsehen. Als gutes und geringes Silber zu mischen, wobey aber zu merken, daß das Silber nach der Mark oder 16 Loth geschätzt werde, das, wo in 16 Lothen 13 Loth Silber und 3 Loth Kupfer ist, wird 13 löthig Silber genannt. Das unter das Silber gemischte Kupfer aber wird angesehen, als hätte es keinen Werth. Eine hieher gehörige Aufgabe wäre folgende.

68ste Aufgabe.

Man soll 15 löthiges und 9 löthiges Silber so vermischen, daß 13 löthiges herauskomme.

Auflösung.

Wir wollen diese Aufgabe allgemein auflösen. Es sey daher a löthiges und b löthiges Silber so zu vermischen, daß c löthiges herauskomme.

Man bedenke nun, daß a, b und c nicht Zahlen von Lothen, sondern Sechszehntheile bedeuten, wenn die Mark, wie hier geschehen muß, = 1 gesetzt wird. Man nehme also von einer Mark a löthiges Silber x und von einer Mark b löthiges Silber y. Die Theile x und y müssen zusammengenommen eine Mark c löthiges Silber geben, also: $x + y = 1$ der $x$te Theil einer Mark a löthiges Silber enthält $\frac{ax}{16}$ Mark fein Silber, und der yte Theil enthält $\frac{by}{16}$ Mark fein Silber, und nun muß wiederum $\frac{ax}{16} + \frac{by}{16} = \frac{c}{16}$ Mark fein Silber betragen, oder $ax + by = c$. Nun sieht ein jeder, daß hier $x = \frac{c-b}{a-b}$, und $y = \frac{a-c}{a-b}$ seyn muß, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Es ist also verstattet, von diesen Brüchen nur die Zähler hinzuschreiben, weil der gemeinschaftliche Nenner sich in der Rechnung aufhebt; dieß muß aber erinnert werden, wenn man die Rechnung verständlich und Anfängern belehrend vortragen will.

Diese Erinnerung ist von vielen Rechnern nicht geschehen, und doch haben sie ihren Rechenbüchern, durch hie und da angebrachte Buchstabenrechnungen ein mathematisches Ansehen geben wollen. Ihr Vortrag aber zeigt deutlich, daß sie solche nur abgeschrieben, aber selbst nicht verstanden haben.

Die

Die Rechnung in Zahlen steht so:

			gegen einander verkleinert.
	15	4	2
13			
	9	2	1

Zusammen 3 Theile.

Also $\frac{2}{3}$ Mark 15 löthiges und $\frac{1}{3}$ Mark 9 löthiges.

Probe.

$\frac{2}{3}$ einer Mark 15 löthiges enthält $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{10}{16}$ einer Mark fein Silber, und $\frac{1}{3}$ einer Mark 9 löthiges enthält $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$ einer Mark fein Silber, also $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})$ einer Mark enthalten zusammen $= \frac{10}{16} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$ fein Silber, d. h. geben zusammen 13 löthiges Silber. Dieses wird die regula alligationis genannt, und beym Münzwesen und Silberarbeiten mit Nutzen gebraucht. Siehe Schlüters Unterricht von Hüttenwerken im Probierbuche, Cap. 33.

Hieher gehört auch Archimedes Kronenprobe des Sizilianischen Königs Hiero. Der König Hiero in Syrakus hatte einem Goldarbeiter 18 ℔. reines Gold gegeben, um ihm eine Krone daraus zu verfertigen. Da sie fertig war, entstand bey ihm der Verdacht, daß sie mit Silber versetzt, oder Silber in ihr versteckt seyn möchte. Archimedes, ein Verwandter des Königs, bekam den Auftrag, sie zu untersuchen, doch ohne das schön gerathene Werk der Kunst weder durch Feilen, noch sonst etwas zu beschädigen. Die Aufgabe machte ihn so lange verlegen, bis er einmal ins Bad ging, und betrachtete, wie mit dem Einsenken seines Körpers das Wasser in dem Behälter in die Höhe stieg. Ich habe es gefunden! rief er aus, und vergaß sich, wie die Geschichte sagt, so sehr in seiner Freude darüber,

daß

daß er nackend über die Gasse nach Hause eilte, um auf folgendem Wege die Sache auszuforschen.

Er ließ sich 18 ℔. reines Gold und 18 ℔. reines Silber reichen. Jenes versenkte er in ein Gefäß voll Wasser, von welchem nun, als er das Gold einsenkte, eine gewisse Masse durch ein zu dem Ende gemachte Oeffnung abfloß. Als er das Silber hineinsenkte, floß natürlich das Wasser ab, welches dem Raume gleich wog, den das Silber mehr, als vorhin das Gold einnahm. Dieß Wasser wog er ab. Als er die Krone hineinsenkte, floß natürlich nicht eben so viel Wasser ab; denn die Krone war nicht ganz Silber. Aber es floß doch mehr Wasser ab, als welches bey Einsenkung des 18 ℔. reinen Goldes abfloß. Als er aber durchs Wägen fand, daß ein Drittheil des vorher abgewogenen Wassers war, schloß er mit Recht, die Krone enthalte einen Drittheil ihres Gewichts, oder 6 ℔ an Silber. Denn wenn der Unterschied des Raums zwischen 18 ℔. Gold und eben so vielem Silber eine Masse Wasser, die für so viel Cöllnische ℔. ungefähr 91½ Quentgen gewesen seyn würde, wirklich gab, so konnte der Unterschied des Raums von 6 ℔. Silber, die in der Krone waren, und 6 ℔. Gold, die in ihr seyn sollten, ein Drittel dieser Masse, nämlich 30½ Quentgen geben. Dieses erzählt Vitruvius B. 9. C. 3.

Man sieht jedoch leicht ein, daß bey diesem Abwägen des abfließenden Wassers große Unrichtigkeiten Statt haben mußten. Archimedes selbst gerieth nachher auf die jetzt bekannte bessere Methode, die ein kleines Schriftchen von ihm darstellt. Von Archimedes hat man zwey Bücher, deren Ausgabe in der lateinischen Uebersetzung De insidentibus humido heißt. Archimedis Opera per Isaac. Barrow, Lond. 1767. p. 245. Griechisch hat sie David Rivaltus a Flurantia herausgegeben,

geben, Paris, 1615. Sie betreffen schwimmende Körper.

Archimedes fand also, daß ein Körper im Wasser gerade um so viel weniger wiegt, als das Wasser an Gewicht beträgt, welches er aus der Stelle treibt; nun aber nehmen 18 ℔. Gold weniger Raum ein, als 18 ℔. Silber, und 18 ℔. von einer Masse, welche aus Gold und Silber besteht, muß demnach offenbar mehr Raum, als 18 ℔. Gold, und weniger als 18 ℔. reines Silber einnehmen. 18 ℔. Gold verlieren also im Wasser an ihrem Gewicht weniger, als 18 ℔. Masse von Gold und Silber, und diese weniger, als 18 ℔. reines Silber. Die hieher gehörige allgemeine Aufgabe wäre daher folgende.

69ste Aufgabe.

Aus dem gegebenen Gewichte eines aus zweyerley Metallen zusammengeschmolzenen Klumpens, und wie viel solcher am Gewicht im Wasser verliert, desgleichen, wie viel ein jedes von gleichem Gewicht vor sich ungemischt im Wasser verliert, zu finden, wie viel von jedem in dem Klumpen sey?

Auflösung.

Die beyden zusammengeschmolzenen Metalle mögen A und B heißen.

Das Gewicht des zusammengeschmolzenen Klumpens sey p.

In diesem Klumpen sey von dem Metall A x, und von B y enthalten;

also ist: $x + y = p$.

Von

Von A verlieren p ℔. im Wasser a.

Von B verlieren p ℔. im Wasser b.

Die aus beyden Theilen $x + y = p$ bestehende Masse verliert im Wasser c.

Wie viel nun x von A und y von B im Wasser jedes einzeln verliert, erfahren wir durch folgende Proportion.

$$p : x = a : \frac{ax}{p} = \text{dem Verlust für } x$$

$$p : y = b : \frac{by}{p} = \text{dem Verlust für } y$$

mithin verlieren beyde zusammen im Wasser

$\frac{ax}{p} + \frac{by}{p}$; dieses muß demnach $= c$ seyn.

Daher $ax + by = pc$, und da $x + y = p$, so ist

auch $ax + ay = ap$ subtrahirt.

bleibt: $(b - a)y = (c - a)p$

folglich $y = \frac{c - a}{b - a} \cdot p$

mithin $x = p - y = p - \frac{c - d}{b - a} \cdot p = \left(1 - \frac{c - a}{b - a}\right) p = \frac{b - c}{b - a} \cdot p.$

Die Krone des Königs zu Syrakus wog 18 ℔. $= p$ und verlor im Wasser $\frac{5}{4}$ ℔. $= c$; 18 ℔. Gold verlieren 1 ℔. $= a$ und 18 ℔. Silber verlieren $\frac{7}{4}$ ℔. $= b$

Also $x = \frac{\frac{7}{4} - \frac{5}{4}}{\frac{7}{4} - 1} \cdot 18 = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} \cdot 18 = 12$ ℔. Gold.

und $y = \frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{7}{4} - 1} \cdot 18 = \frac{\frac{1}{4} \cdot 18}{\frac{3}{4}} = 6$ ℔. Silber.

Die

Die Zahlen, welche ich hier für a, b und c angenommen habe, weichen von der Wahrheit etwas ab. Die Richtigkeit dieser Rechnung beruhet nämlich auf der Voraussetzung, daß das Volumen der Mischung, gleich der Voluminum der gemischten Körper sey. Diese Voraussetzung findet aber bey zusammengeschmolzenen Metallen, wie die Erfahrung lehrt, nicht Statt. Siehe Kästners Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Göttingen, 1792. 1. Abtheilung, Seite 152. §. 54. u. s. w.

Daraus würde also folgen, daß, wenn auch a und b, und c und p hier richtig angegeben wären, so würde doch x und y nicht ganz genau zu bestimmen seyn. Aber immer giebt dieses Verfahren etwas der Wahrheit nahe kommendes, welches wohl in der Ausübung dürfte gebraucht werden.

Noch ein Beyspiel in Zahlen.

37 ℔. Zinn verlieren im Wasser 5 ℔., und 23 ℔. Bley verlieren im Wasser 2 ℔.; ferner eine Mischung aus Zinn und Bley von 120 ℔. verliert im Wasser 14 ℔. Wie viel Zinn und Bley ist in dieser Mischung gewesen?

Auflösung.

Da 37 ℔. Zinn 5 ℔. verlieren, so verliert 1 ℔. Zinn $\frac{5}{37} = a$ und 1 ℔. Bley verliert $\frac{2}{23} = b$, und ferner 1 ℔. der gemischten Masse verliert $\frac{14}{120} = c$, und $120 = p$.

Ich bestimme nämlich a, b, c, für Massen von gleichem Gewichte.

Daher ist $x = \frac{b-c}{b-a} \cdot p = \frac{\frac{2}{23} - \frac{14}{120}}{\frac{2}{23} - \frac{5}{37}} \cdot 120 =$

$2 \cdot 120$

$\frac{2 \cdot 120 - 14 \cdot 23}{2 \cdot 37 - 5 \cdot 23} \cdot 37 = \frac{-82}{-41} \cdot 37 = 74$ ℔. Zinn
und demnach $y = 120 - 74 = 46$ ℔. Bley.

Durch Raisonnement.

Ein ℔. Zinn verliert im Wasser $\frac{115}{851}$ ℔. und 1 ℔. Bley $\frac{74}{851}$ ℔.; also verlieren 120 ℔. Bley im Wasser nicht 14 ℔., sondern nur $10\frac{370}{851}$ ℔., folglich $3\frac{481}{851}$ ℔. weniger; da nun 1 ℔ Zinn $\frac{41}{851}$ ℔. mehr, als 1 ℔. Bley verliert, so braucht man ja nur zu untersuchen, wie oft $\frac{41}{851}$ ℔. in $3\frac{481}{851}$ enthalten ist, um 74 ℔. als den Gehalt an Zinn für die Metallmischung von 120 ℔. zu finden.

Dieses Exempel stehet auch in Herrn Hofrath Kästners oben angeführten Anfangsg. der angew. Math. Erste Abth. Seite 249. II. Ich muß hier anders rechnen, als Herr Kästner; Anfängern dienen beyde Methoden zu vergleichen zu einer guten Uebung.

In des verewigten Karstens Anfangsgründen der Mathematik, Greifswalde, 1780. 2ter Band, in der Hydrostratik, Seite 195, stehet auch die Aufgabe von der Krone, sie wird 20 ℔. schwer angegeben und auch a, b, c, sind ein wenig von der unsrigen verschieden. — Karsten rechnet diese Aufgabe nach der Alligationsrechnung, und hiernach stehet sie auch in des Herrn Prof. Huths Anfangsgründen der angewandten Mathematik. Halle, 1789. Seite 146.

Auch unser Beyspiel stehet in Karstens Lehrbegriff der Mathematik, Greifswalde, zweyte Auflage, 1790. 3ter Theil, Seite 278, nach der Alligationsrechnung gerechnet — ich kann nicht sagen, daß ich diese Rechnung vortheilhaft finde. Kurz vorher, Seite 277, rechnet er wie Kästner.

Muschen-

Muschenbrök Introd. ad Phil. Natur. §. 1401. giebt ebenfalls das Exempel der Krone 20 ℔. schwer an. Die Verbesserung, die seine Rechnung bedarf, findet man bey Karsten Seite 274. In Wolfs Anfangsgr. der Mathematik, Halle, 1750. 2ter Theil, S. 859. wird die Krone 18 ℔. angegeben, aber die dort für a, b, c, angenommenen Verhältnisse, geben gerade das Umgekehrte von unsern Werthen.

Daß Archimedes den Grund zur Hydrostratik gelegt haben mag, kann wahr seyn, wenn auch gleich die Erzählung der Kronenprobe ein Märchen seyn mag.

Die 67ste Aufgabe und folgende sind nur die leichtesten Fälle der Alligationsrechnung. Allgemeiner gehören Vermischungsrechnungen zu unbestimmten Aufgaben, die von mir erst in der Folge beygebracht werden. Siehe Kästners Fortsetzung der Rechenkunst Cap. XI.

70ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt: das Vierfache der ersten mit dem Vierfachen der zweyten macht 23. Das Siebenfache der ersten mit dem Zweyfachen der andern macht 20.

Durch Raisonnement.

Aus der Aufgabe folgt, einmal: daß, wenn man die erste Zahl mit $1\frac{1}{4}$ der zweyten Zahl addirt, man zur Summe $5\frac{3}{4}$ erhält; und zweytens: wenn man die erste Zahl zu $\frac{2}{7}$ der zweyten Zahl addirt, man zur Summe $2\frac{6}{7}$ erhält; da nun $\frac{2}{7}$ der zweyten Zahl um $\frac{27}{28}$ kleiner ist, als $1\frac{1}{4}$ dieser Zahl, und ferner die Summe $2\frac{6}{7}$ um $\frac{81}{28}$ kleiner, als die Summe $5\frac{3}{4}$ ist, so muß auch $\frac{27}{28}$ der zweyten Zahl gleich $\frac{81}{28}$, oder $\frac{1}{28}$ der

zwey=

zweyten Zahl gleich $\frac{3}{2\frac{3}{8}}$, und also endlich die zweyte Zahl selbst gleich 3 seyn. Die erste Zahl ist demnach $28 = 5\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 3 = 2$.

Algebraische Auflösung.

Die zwey verlangten Zahlen seyen x und y, so ist der Aufgabe gemäß:

$$4x + 5y = 23, \text{ daher } 8x + 10y = 46$$
$$7x + 2y = 20, \text{ daher } 35x + 10y = 100$$

Die obere Gleichung von der untern abgezogen } giebt: $27x = 54$

folgl. $x = \frac{54}{27} = 2$

Da $7x + 2y = 20$
so ist $2y = 20 - 7x$
mithin $y = 10 - \frac{7x}{2}$, daher $y = 10 - \frac{7 \cdot 2}{2} = 3$

71te Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen, x und y verlangt: das Sechsfache der ersten mit dem Fünffachen der zweyten, beträgt 97. Das Vierfache der ersten mit dem Zehnfachen der zweyten macht 138.

Auflösung.

Es ist also $6x + 5y = 97$
$4x + 10y = 138$ } Die obere Gleichung mit 2 multiplizirt.
giebt: $12x + 10y = 194$ } die obere Gleichung subt.

kömmt $8x = 56$
folgl. $x = 7$

und da $4x + 10y = 138$, so ist $10y = 138 - 4x$
folglich $y = \frac{138 - 4x}{10} = 11$.

Wollte man x auf ähnliche Art wegschaffen, als man vorhin y wegschaffte, so darf man nur mit dem Coefficienten von x aus beyder Gleichung diese Gleichung wechselweis multipliziren. Haben aber diese Coefficienten einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann man sie vorher damit verkleinern, und gebraucht bloß die Quotienten.

Es war nämlich hier:

$$6x + 5y = 97$$
$$4x + 10y = 138$$

Die Coefficienten 6 und 4 lassen sich durch 2 verkleinern, und man erhält die Zahlen 3, 2.

Man multiplizire daher die obere Gleichung mit 2 und die untere mit 3, und ziehe die obere von der untern ab:

$$\text{also } 12x + 10y = 194$$
$$\text{und } 12x + 30y = 414$$
$$\text{---------------}$$
$$20y = 220$$
$$\text{folgl. } y = 11 \text{ wie vorhin.}$$

72ste Aufgabe.

In einem Laboratorium giebt es zweyerley Brandröhrensätze, von welchen man weiß, daß, wenn von zwey gleichen Brandröhren, die eine von dem ersten und die andere von dem zweyten Satze angefüllt wird, jener 30 Momente, dieser aber nur 20 Momente lang brennt. Wenn nun die Menge des ersten Satzes 3 ℔., die Menge des zweyten aber nur 2 ℔. ist, und diese beyden Sätze unter einander gemischt werden, so frägt sichs, wie viel Momente alsdann

dann die Vermischung in einer gleichgroßen Brandröhre brennen werde.

Auflösung.

Wir wollen diese Aufgabe sogleich allgemein auflösen. Man setze daher die Menge, die sowohl von jedem der angegebenen zwey Sätze, als auch die Menge von der Vermischung zur Anfüllung einer Brandröhre erfordert wird = p ℔. (nach den Prinzipien der Artillerie ist p ein Bruch), die gesuchte Anzahl der Momente, so die Vermischung brennen wird = x; ferner 30 = a, 20 = b, 3 = c, und 2 = d.

Da nun p ℔. von dem ersten Satze ã Momente brennen, so werden c ℔. desselben, wenn solche nach und nach in die erwähnte Brandröhre gefüllt würden, $\frac{a \cdot c}{p}$ Momente brennen; folglich beyde unvermischt nach und nach eingefüllt, eine Zeit von $\frac{ac+bd}{p}$ Momente aushalten, dieses sey = y.

Ferner, da p ℔. von der Vermischung x Momente brennen, so müssen (c + d) ℔., $\frac{(c+d)\,x}{p}$ = y Momente brennen, folglich:

$$\frac{ac+bd}{p} = \frac{(c+d)\,x}{p}$$

$$\text{mithin } \frac{ac=bd}{c+d} = x$$

Für unsere bestimmten Zahlen finden wir also:

$$x = \frac{30.3+20.2}{3+2} = \frac{\overset{6}{3\emptyset}.3+\overset{4}{2\emptyset}.2}{5} = 26 \text{ Momente}$$

Auch diese Aufgabe gehört zur Alligationsrechnung.

Man

Man siehet auch leicht, daß y gar nicht nöthig ist einzuführen, und alles mit x abgethan werden kann; auch ist es Anfängern bemerkenswerth, daß hier, das zu Anfang der Rechnung eingeführte p, zuletzt ganz aus der Rechnung verschwindet, ohngefähr wie oben bey der Vermischung des a und b löthigen Silbers in der 68sten Aufgabe die Nenner 16 aus der Rechnung wegfielen.

73ste Aufgabe.

Ein Ingenieur fragte einen Werbeoffizier, der zwey Rekruten angeworben hatte, wie viel er jedem Handgeld gegeben hätte? Dieser gab zur Antwort: Der eine ist einige Zoll größer, als der andere; wenn ich nun dem Kleinern 30 rthlr. mehr gegeben hätte, so hätte er $\frac{2}{5}$ von dem Handgelde des Größern mehr, als der Größere bekommen; hätte ich aber dem Größern 30 rthlr. mehr gegeben, so hätte er noch einmal so viel, als der Kleinere bekommen. Die Frage ist: Wie viel hat jeder Handgeld bekommen?

Durch Raisonnement.

Bekömmt der Größere 30 rthlr. mehr, so hat er noch einmal so viel, als der Kleinere, folglich hat der Kleinere die Hälfte des Größern nebst 15 rthlr. erhalten, erhält er nun hierzu noch 30 rthlr., so ist sein Handgeld gleich der Hälfte des Größern, nebst 45 rthlr.; da er nun, der Aufgabe gemäß, $\frac{2}{5}$ vom Handgelde des Größern mehr, als der Größere bekommen hat, so daß, wenn jener $\frac{5}{5}$ hat, er $\frac{7}{5}$, oder, welches gleich viel ist, wenn jener $\frac{10}{10}$ hat, er $\frac{14}{10}$ habe. Ein solches $\frac{1}{10}$

ist

ist also gleich $\frac{45}{9} = 5$, demnach das Handgeld des größern gleich 50 rthlr. Der Kleinere bekommt also Handgeld $\frac{50 + 30}{2}$ oder 40 rthlr.

Algebraische Auflösung.

Man setze das Handgeld des Kleinern $= x$ und das Handgeld des Größern $= y$, so hat man folgende Gleichungen:

$x + 30 = y + \frac{2}{5} y$, nach der ersten Bedingung der Aufgabe

und $\frac{y + 30}{2} = x$, nach der zweyten Bedingung der Aufgabe,

setzen wir diesen Werth für x in die erste Gleichung, so ist:

$\frac{y}{2} + 15 + 30 = y + \frac{2}{5} y$ mit $2 . 5 = 10$ multipl.

giebt $5y + 450 = 10y + 4y$ $5y$ subtrahirt.

bleibt: $450 = 9y$

folglich $\frac{450}{9} = 50$ rthlr.

und $x = \frac{y}{2} + 15 = \frac{50}{2} + 15 = 40$ rthlr.

74ste Aufgabe.

Es ist die Geschwindigkeit zweyer Körper, A und B, die sich nach einer Gegend bewegen und ihre Entfernung von einander gegeben; hiernach soll man bestimmen, wenn eher der geschwindere Körper den langsamern einholet.

Auflösung.

Ehe wir zur Auflösung schreiten, wollen wir bemerken, daß, wenn Geschwindigkeiten als bekannt gegeben

ben werden, solches so viel heiße: es sey bekannt, welchen Raum ein jeder Körper in einerley Zeit durchlaufe. Denn wenn die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, wie die durchlaufenen Räume, das ist: wenn ein Körper in einer Minute 2mal, 3mal, u. s. w. so weit kommt, als ein anderer in gleicher Zeit, so ist auch seine Geschwindigkeit 2mal, 3mal u. s. w. so groß, als die Schnelligkeit des andern.

A gehe geschwinder als B, ihre Geschwindigkeit verhalte sich wie a : b, das heißt: wenn der Körper A den Raum a durchläuft, so durchläuft in eben der Zeit B den Raum b.

Ihre Entfernung von einander sey c, in Zeittheilen gegeben, (das heißt, in Sekunden, Minuten, Stunden oder Tagen u. s. w.)

Oder ihre Entfernung von einander sey d, in Längenmaaß gegeben, (das heißt, in Fußen oder Meilen u. s. w.)

Der Raum, den A zu durchlaufen hat, ehe er B einholt, sey $= y$.

Der Raum, den B noch zu durchlaufen hat, ehe er eingeholt wird, sey $= x$.

Da nun der Körper A den Raum y in eben der Zeit durchlaufen muß, in der B den Raum x durchläuft, so ist:

$$a : b = y : x,$$

folglich $ax = by$

aber y ist gleich $c + x$.

Setzen wir diesen Werth für y in die obige Gleichung, so erhalten wir:

$$ax = bc + bx$$

bx subtrahirt.

bleibt $(a - b)\,x = bc$

folglich $x = \frac{bc}{a-b}$

Mit der Geschwindigkeit b legt man in der Zeit c den Raum bc zurück, dieser Raum muß aber = d, gleich der Entfernung beyder Körper seyn, daher ist auch:

$$x = \frac{d}{a-b}$$

Aus der ersten Gleichung für x folgt folgende Proportion a − b : b = c : x, das ist, wie sich die Differenz der Geschwindigkeiten zur kleinern Geschwindigkeit verhält, so verhält sich die Entfernung zu dem gesuchten Raume.

75ste Aufgabe.

Ein Bothe A macht täglich 6, ein anderer B, 4 Meilen, A gehet aber 3 Tage später aus, als B. Wann holt A B ein?

Hier wäre also aus der vorhergehenden Aufgabe
a = 6, b = 4, c = 3,
folglich (6 − 4) : 4 = 3 : x, also x = 6 Tagen;
d wäre hier = 3 . 4 = 12 Meilen.

76ste Aufgabe.

Anno 1758. Johannis, den 24. Junii, um Mittag, stehet die Sonne im vierten Zeichen 2°, 44, der Mond im 11. Zeichen 15°, 39′. Der Mond läuft in einer Minute 32″, 56‴; die Sonne 2″, 28‴; hiernach soll man die Zeit der Zusammenkunft des Mondes und der Sonne bestimmen.

Auflö-

Auflösung.

Hier ist a = 32″ + 56‴ = 1976‴
und b = 2″ + 28‴ = 148‴
d oder die Entfernung des Mondes von der Sonne bestimmen wir so:

Ein Zeichen hält 30°, und 12 Zeichen giebt es hier nur; da nun der Mond schon 15°, 39′ vom 11ten Zeichen zurückgelegt hat, so stehet er vom Ende der 12 Zeichen nur noch um 2 Zeichen − (15°, 39′) = 1 Zeichen 14°, 21′.

Die Sonne ist aber auf der andern Seite der 12 Zeichen von diesem Zeichen

3 Z. 2°, 44′ entfernt,
also: 1 Z. 14° 21′
also: 3 Z. 2° 44′
——————————— addirt.

Beyder Entfernung
von einander = 4 Z. 17° 5′ = 29610000‴ = d

folglich $x = \frac{29826000}{1976 - 148} = 16237$ Tertien $4' 3'' 37''' \frac{191}{457}$

Doch lehrt die Astronomie, daß noch einige Ungleichheiten mit berechnet werden müssen.

77ste Aufgabe.

Ein Bothe B gehet täglich b Meilen, nach c Tagen wird ihm ein anderer Bothe A nachgeschickt, mit dem Befehl, den B in x Tagen einzuholen. Wie viel Meilen muß also A täglich machen?

Auflösung.

A macht täglich a Meilen nach der 74sten Aufgabe $x = \frac{bc}{a-b}$. Da nun hier b, c und x als bekannt,

a aber als unbekannt angesehen wird, so müssen wir a zu entwickeln suchen. Dieses geschieht, indem wir auf beyden Seiten mit a – b multipliziren, und erhalten:

$$ax - bx = bc$$
$$ax = b\,(c + x)$$
$$\text{folglich } a = \frac{b\,(c + x)}{x}$$

oder $x : (c + x) = b : a$, das ist:

Wie sich die Tage des Einholens zur Summe der später abgeschickten und der Tage des Einholens verhält, so verhält sich die Tagereise des ersten Bothens zur gesuchten Tagereise des nachgeschickten Bothens.

Wäre alles Uebrige bekannt, nur c nicht, so findet sich aus der Formel $c = \frac{(a-b)\,x}{b}$

Diese Formel löst folgende Aufgabe auf.

78ste Aufgabe.

Ein Bothe A, der täglich a Meilen macht, holt einen andern Bothen B, der täglich b Meilen macht, in x Tagen ein. Wie viel Tage war B schon voraus?

Auflösung.

Aus der Formel $c = \frac{(a-b)\,x}{b}$, folgt

$b : a - b = x : c$, das ist:

Wie

Wie sich die Tagereise des B zu der Differenz der Tagereise beyder Bothen verhält, so verhalten sich auch die Tage des Einholens zur gesuchten.

Sucht man aus der Formel b zu entwickeln, so findet man $b = \frac{a\,x}{c + x}$ dieses giebt folgende Aufgabe.

79ste Aufgabe.

Hinter einem Bothen B wird nach c Tagen ein anderer Bothe A, der täglich a Meilen geht, geschickt, mit dem Befehl, B in x Tagen einzuholen. Wie viel Meilen macht täglich der Bothe B?

Auflösung.

Aus der Formel $b = \frac{a\,x}{c - x}$, folgt

$$c + x : x = a : b,$$ das ist:

Wie die Summe der später abgeschickten und der Tage des Einholens zu den Tagen des Einholens sich verhält, so die Tagereise des nachgeschickten Bothen zur gesuchten.

Die 77-, 78- und 79ste Aufgabe sind alle aus der 74sten Aufgabe abgeleitet worden. Dieses ist also ein Vortheil, den die allgemeine Auflösung einer Aufgabe gewährt, so daß, wenn man die unbekannte Größe als bekannt, und eine von den bekannten als unbekannt ansiehet, hierdurch sich die Aufgabe in eine ganz andere verwandelt.

Noch mögen einige Beyspiele folgen.

80ste Aufgabe.

Ein fliegend Corps A, welches täglich $a = 5$ Meilen zurücklegt, holt eine feindliche Truppe B, die $d = 18$ Meilen entfernt ist, in $x = 6$ Tagen ein. Wie viel Meilen macht der feindliche Trupp täglich.

Auflösung.

Nach der 74sten Aufgabe ist $x = \frac{d}{a-b}$

also $ax - bx = d$

oder $-ax + bx = -d$

und also $bx = ax - d$

folglich $b = \frac{ax-d}{x}$

Wir müssen nämlich b, die Tagereise des feindlichen Trupps, suchen,

mithin $b = \frac{5 \cdot 6 - 18}{6} = 5 - 3 = 2$ Meilen täglich.

81ste Aufgabe.

Um welche Zeit wird den Stundenzeiger B der Minutenzeiger A zwischen 7 und 8 Uhr decken?

Auflösung.

Wenn B auf 7 Uhr zeiget, so zeiget A auf 12 Uhr, folglich hat B, $d = 7$ Stunden voraus. B hat eine Geschwindigkeit $b - 1$, A aber $a = 12$ (weil B eine Stunde und A 12 Stunden in gleicher Zeit durchläuft), demnach ist nach der 74sten Aufgabe $x = \frac{d}{a-b}$

$= \frac{7}{12-1} = \frac{7}{11}$ Stunde, oder beynahe 38 M. 11 S. über 7 Uhr.

82ste Aufgabe.

Ein Körper von K Kubikfuß wiegt p ℔. Er bestehet aus zweyerley Materien: von der schweren wiegt ein Kubikfuß s ℔., und von der leichtern wiegt ein Kubikfuß l ℔., wie viel enthält der Körper von jeder Materie?

Auflösung.

Von der schweren enthalte er x und von der leichtern y Kubikfuß.

x Kubikfuß zu s ℔.,	machen	$s . x$ ℔.
y Kubikfuß zu l ℔.,	machen	$l . y$ ℔.
	Zusammen	$(b\,y + s . x)$ ℔.

Also $l . y + s . x = p$; es ist aber $y\,x = k$,

mithin auch $l\,y + l\,x = lk$ subtrahirt.

bleibt $(s - l)\,x = p - l . k$

folglich $x = \frac{p - l . k}{s - l}$

Regel. Vom ganzen Gewichte (p) des Körpers ziehe man das Gewichte ab, welches er haben würde, wenn er ganz aus der leichtern Materie bestünde (l. k). Das Uebrige theile man durch den Unterschied der Gewichte eines Kubikfußes von jeder Materie (s – l).

Auch selbst, wer ohne algebraische Schlüsse diese Aufgabe auflösen wollte, müßte durch sein Raisonnement auf diese Regel verfallen. Denn, wenn ich vom ganzen Gewichte des Körpers dasjenige abziehe, was er wiegen würde, wenn er ganz aus der leichtern Materie bestünde, so zeiget der Rest den Ueberschuß des Gewichts an, welches aus der schweren Materie entstehet.

stehet. Theile ich nun diesen Rest durch den Ueberschuß des Gewichts jedes Kubikfußes, nämlich durch den Unterschied der Gewichte, so erfahre ich, wie vielmal dieser Ueberschuß eines Kubikfußes im ganzen Ueberschusse enthalten ist, und folglich, wie viel Kubikfuß von der schweren Materie vorhanden seyn müssen.

Will man nun auch y, das ist, die Anzahl der Kubikfüße der leichtern Materie algebraisch bestimmen, so ist sie

$$y = k - x = k - \frac{p - lk}{s - l}$$

$$= \frac{ks - kl - p + lk}{s - l}$$

$$\text{folglich } y = \frac{ks - p}{s - l}$$

Regel. Vom Gewichte (ks), welches der Körper haben würde, wenn er ganz aus der schweren Materie bestünde, wird das Gewicht (p), was er wirklich hat, abgezogen, und der Rest wird, wie vorher, durch den Unterschied der Gewichte dividirt.

Diese Regel findet sich auch, wie vorher, ohne algebraische Schlüsse.

Beyde Regeln lassen sich bequem in eine Regel fassen:

Wenn ein Körper aus zweyerley Materien bestehet, und man will wissen, wie viel von der einen darin ist, so berechnet man erstlich, was er wiegen würde, wenn er bloß aus der einen Materie bestünde. Man nimmt den positiven Unterschied dieses und des wirklichen Gewichts.

Dieser

Dieser Unterschied wird durch den Unterschied der relativen Schwere dividirt.

Als Beyspiel mag folgende Aufgabe dienen.

83ste Aufgabe.

Ein Körper, aus Bley und Zinn zusammengeschmolzen, wiegt $2917\frac{3}{4}$ ℔., und seine Größe beträgt 5 Kubikfuß. Wie viel ist darinnen Bley und Zinn?

Auflösung.

Man nimmt als bekannt an, daß ein Pariser Kubikfuß Bley $795\frac{1}{5}$ Pariser ℔., ein Kubikfuß Zinn hingegen $442\frac{2}{5}$ ℔. wiegt.

Hier ist $p = 2917\frac{3}{5}$; $k = 5$; $s = 795\frac{1}{5}$; $l = 442\frac{2}{5}$

$$\text{also } x = \frac{2917\frac{3}{5} - 5 \cdot 442\frac{2}{5}}{795\frac{1}{5} - 442\frac{2}{5}} = \frac{705\frac{3}{5}}{352\frac{4}{5}} = 2.$$

Also sind im gegebenen Körper 2 Kubikfuß Bley, und $5 - 2 = 3$ Kubikfuß Zinn.

Probe.

2 Kubikfuß Bley zu $795\frac{1}{5}$ ℔., machen $1590\frac{2}{5}$ ℔. Bley.
3 Kubikfuß Zinn zu $442\frac{3}{5}$ ℔., machen $1327\frac{1}{5}$ ℔. Zinn.

Zusammen $2917\frac{1}{5}$ ℔. Metall.

Wenn in der 82sten Aufgabe $k = 1$ gesetzt wird, so erhalten wir:

$$x = \frac{p-1}{s-1}; \text{ und } y = \frac{s-p}{s-1}; \text{ und } x : y = (p-1) : (s-p).$$

Das bisherige findet seine Anwendung in der Statik, wo ich aber nochmals wieder erinnern muß, daß

daß beym Zusammenschmelzen der Metalle, dieselben gemeiniglich eine etwas andere Dichtigkeit erhalten, als vermöge der Rechnung geschehen sollte, so daß die Rechnung das verlangte Verhältniß nicht vollkommen genau angiebt. Dieses ist überhaupt ein Umstand, der sich allemal ereignet, wenn die abstrakten Regeln auf Gegenstände der Natur oder Kunst angewandt werden sollen; denn es finden sich dabey viele Nebendinge, welche die berechneten Quantitäten entweder vergrößern, oder verkleinern, und welche nicht bestimmt genug sind, um sie in Anschlag zu bringen, und in der Rechnung mit einzuführen.

84ste Aufgabe.

Zwey Malter Roggen und acht Malter Waizen kosten zusammen 64 rthlr. Drey Malter Roggen und 6 Malter Waizen kosten nach demselben Preise 54 rthlr. Wie viel kostet 1 Malter von jedem?

Auflösung.

1 Malter Roggen kostet x, 1 Malter Waizen y rthlr.
laut der Aufgabe ist:

$$2x + 8y = 64; \qquad 3x + 6y = 54$$
$$\text{also } x + 4y = 32; \text{ und } x + 2y = 18$$
$$\text{da } x + 2y = 18$$

subtrahirt.

$$2y = 14$$

folglich $y = 7$ rthlr. und also $x = 18 - 2y = 4$ rthlr.

Probe.

2 Malter Roggen	à 4 rthlr.	=	8 rthlr.
8 Malter Waizen	à 7 rthlr.	=	56 rthlr.
		Summa	64 rthlr.

3 Mal-

3 Malter Roggen à 4 rthlr. = 12 rthlr.
6 Malter Waizen à 7 rthlr. = 42 rthlr.

Summa 54 rthlr.

85ste Aufgabe.

Von einem Orte, der a Meilen vorwärts liegt, geht ein Bothe A, der m Meilen in n Stunden macht, h Stunden früher aus, als der Bothe B, der ihm nachgeschickt wird, und p Meilen in q Stunden machen muß, um A in x Stunden zu erreichen.

Auflösung.

Die Zeit für B sey x und für A y Stunden.

Demnach hat man $n : m = y : \frac{my}{n}$ den Weg für A; und $q : p = x : \frac{px}{q}$ den Weg für B. Nun hat A a Meilen voraus, also beträgt der ganze Weg, den A vor B voraus hat, $\frac{my}{n} + a$; derselbe Weg muß aber von B in der Zeit x zurückgelegt werden. Demnach muß seyn:

$$\frac{px}{q} = \frac{my}{n} + a;$$ ferner ist $h + x = y$,

daher $\frac{mh + mx}{n} = \frac{m}{n} y$ subtrahirt.

bleibt $\frac{(np - mq)x}{nq} - \frac{mh}{n} = a$

$$\frac{(np - mq)x}{nq} = a + \frac{mh}{n}$$

folg-

folglich $x = \frac{anq + hmq}{np - mq} = \frac{(an + hm)\,q}{np - mq} = \frac{a + h\frac{m}{n}}{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}$

Z. B. A und B gehen von einem Orte aus, jener q Stunden früher. A macht 2, B aber 3 Meilen in einer Stunde. Demnach ist hier $a = 1$, $h = 9$, $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$, und $q = 1$;

folglich $x = \frac{(1 \cdot 1 + 9 \cdot 2) \cdot 1}{1 \cdot 3 - 2 \cdot 1} = 18$ Stunden

$y = h + x = h + \frac{(an + hm)}{np - mq} = \frac{(ph + aq)\,n}{np - mq}$

Der ganze Weg, den A voraus hat $= \frac{m}{n} y + a$

$= \frac{m\,(ph + aq)}{np - mq} + a = \frac{(mh + an)\,p}{np - mq}$

Der Weg für B $= \frac{px}{q} = \frac{(an + hm)\,p}{np - mq}$

Also kommt für den ganzen Weg gerechnet nur $\frac{n}{m} y$, so ist die dazu gehörige Formel diese $\frac{m\,(ph + aq)}{np - mq}$

Giebt die Auflösung einer Aufgabe die unbekannte Größe negativ: so muß man sie in einem entgegengesetzten Sinne nehmen; oder will man die Größen, die in der Aufgabe vorkommen, in einem entgegengesetzten Sinne nehmen, so muß man sie negativ ansetzen. Folgende Aufgabe mag es erläutern. Siehe Ersten Theil, Seite 255. Aufg. 236.

86ste Aufgabe.

A reiset von Mainz aus und macht 3 Meilen in einer Stunde; B reiset von Rom 6 Stunden frü-

früher aus und macht 2 Meilen in einer Stunde. Wann werden sie einander begegnen, da Mainz und Rom 100 Meilen von einander liegen?

Auflösung.

Nach der vorhergehenden Aufgabe ist also hier $a = 100$, $p = 2$, $q = n = 1$, $h = -6$, nämlich negativ, weil vorher A zuerst ausging, hier aber B zuerst ausgehet. Auch ist $m = -3$, weil vorher A sich von B entfernte, hier aber dem B entgegen kömmt. Die gesuchte Zeit x für B ist nun positiv. Hätte ich aber h und m positiv für A gesetzt, so würde ich x und p negativ für B haben. Aber q und n bleiben beyde positiv, weil die Zeit während der Reise vorher und hier auf einerley Art verfließt.

Die allgemeine Formel verwandelt sich also für diesen Fall, wie folget.

$$x = \frac{(mh + na)\,q}{np + mq} = \text{also in Zahlen}$$

$$\frac{(3 \cdot x \cdot 6 + 1 \cdot x \cdot 100)}{1 \cdot 2 + 3 \cdot 1} = \frac{118}{5} = 23\tfrac{3}{5}, \text{ d. i.}$$

B wird in $23\frac{3}{5}$ Stunden nach seiner Abreise von Rom dem A begegnen. Ich habe nämlich die allgemeine Formel für x hier gleich so eingerichtet, daß man nur nöthig hat die Zahlen für die Buchstaben zu setzen, ohne auf ihre Zeichen zu sehen. Jetzt will ich den Weg für B eben so berechnen. Die Formel ist hiezu nach der gehörigen Verwandlung: $\frac{p\,(an + mh)}{np + qm}$, also in Zahlen $\frac{2 \cdot (100 \cdot 1 + 3 \cdot 6)}{5} = \frac{236}{5} = 47\frac{1}{5}$, daher für A $52\frac{4}{5}$ Meilen.

Hie-

Hievon überzeugt man sich auch durch die unmittelbare Berechnung. Denn, wenn y die Zeit für B ist, bis er A begegnet, so macht B in dieser Zeit 2y Meilen. A reiset (y – 6) Stunden, und macht also in dieser Zeit 3 (y – 6) = (3y – 18) Meilen.

Daher ist: $2y + 3y - 18 = 100$
oder $5y = 118$
daher $y = \frac{118}{5} = 23\frac{3}{5}$, und der Weg, den er zurückgelegt, $= 2y = 2 \cdot 23\frac{3}{5} = 47\frac{1}{5}$ Meilen, wie vorhin.

Noch eine dergleichen Aufgabe zur Uebung.

87ste Aufgabe.

Ein Bothe A geht des Abends um 8 Uhr von Ryssel nach Paris ab und legt alle Stunden 4 Meilen zurück. Ein anderer, B, geht eben denselben Tag Vormittags um 11 Uhr von Paris nach Ryssel ab und legt alle Stunden 3 Meilen zurück. Man fragt, wie weit sie von Paris einander begegnen?

Auflösung.

Wenn man das, was hier gesagt wird, mit dem, was in der 85sten allgemeinen Aufgabe gesagt worden, vergleicht, so siehet man sogleich, daß der Buchstabe m, welcher den Weg des A in einer gegebenen Zeit ausdrücke, hier negativ seyn muß, weil man in der allgemeinen Auflösung voraussetzte, daß der Bothe A sich von dem andern B entfernte, in diesem Falle aber der erste dem andern entgegen kömmt. Hiernach siehet man auch, daß der Buchstabe h, welcher die Anzahl der Stunden ausdrückte, die der erste Bothe A voraus

hatte,

hatte, auch negativ seyn muß, weil er später abgegangen ist.

Man darf nur in der allgemeinen Formel, die wir für den Weg des B gefunden haben $= \frac{(mh + an)p}{nq - mq}$ setzen $h = -q$; $m = -4$; $n = 1$; $p = 3$; $q = 1$; Paris ist von Ryssel 50 Meilen $= a$, so bekömmt man den Weg für B $=$

$$= \frac{(-4 \cdot -9 + 50 \cdot 1) \cdot 3}{1 \cdot 3 - (-4 \cdot 1)} = \frac{86 \cdot 3}{7} = \frac{258}{7} = 36\frac{6}{7};$$

woraus man sieht, daß die von Paris und Ryssel abgegangenen Bothen einander angetroffen, nachdem jener $36\frac{6}{7}$ Meilen zurückgelegt hat.

Noch ein Paar dergleichen.

88ste Aufgabe.

A ist Montags Abends um 9 Uhr von Orleans aus nach Spanien gereiset und legt in 3 Stunden 7 Meilen zurück. Ein anderer Bothe, B, wird dem ersten Dienstags Vormittags um 11 Uhr von Paris, dessen Entfernung von Orleans wir 34 Meilen setzen wollen, nachgeschickt, dieser macht in 4 Stunden 13 Meilen. Frage: wo sie einander getroffen haben?

Auflösung.

Diese Frage aufzulösen, muß man den Unterschied zwischen 9 Uhr Abends und 11 Uhr Vormittags nehmen, welcher 14 Stunden beträgt.

Es

Es ist also hier: $a = 34$; $h = 14$; $m = 7$; $n = 3$; $p = 13$; $q = 4$; also der Weg für $B = \frac{(7 \cdot 14 + 34 \cdot 3) \cdot 13}{3 \cdot 13 - 7 \cdot 4} = 23\frac{4}{11}$.

89ste Aufgabe.

A und B gehen von einerley Orte aus, A geht 9 Stunden früher aus, als B, und macht 5 Meilen in 2 Stunden, B macht 11 Meilen in 3 Stunden. Wie weit von dem Orte, wo sie beyde ausgegangen sind, wird B den A einholen?

Auflösung.

Hier ist: $a = 0$; $h = 9$; $m = 5$; $n = 2$; $p = 11$; $q = 2$;

also der Weg des $B = \frac{11 \cdot (2 \cdot 0 + 5 \cdot 9)}{2 \cdot 11 - 5 \cdot 3} = \frac{495}{7} = 70\frac{5}{7}$

Siehe im ersten Theil dieser Sammlung Seite 252. Aufg. 234.

Aus den bisherigen Aufgaben siehet man hinlänglich, wie man allgemeine Formeln für jeden angegebenen besondern Fall brauchen soll. Auch kann man sich aus ihr andere allgemeine Formeln für besondere Fälle ableiten. Z. B. für die jetzige 89ste Aufgabe wäre die allgemeine Formel für den Weg, den B macht, $\frac{phm}{np - mq}$; denn a ist Null; und so für andere Fälle, die ich Anfängern zur Uebung überlassen will.

Hieher gehört auch folgende Aufgabe.

90ste

90ste Aufgabe.

Ein Haase hat 780 Sprünge voraus; der Hund, der ihn verfolgt, thut 4 Sprünge, wenn der Haase 3 thut, und 7 Haasensprünge betragen 5 Hundssprünge. Wie viel Sprünge hat der Haase noch zu thun, bis ihn der Hund einholt?

Auflösung.

Man suche die Geschwindigkeit des Haasens und des Hundes mit einander zu vergleichen.

Diese Vergleichung geschiehet folgender Gestalt: der Hund legt mit 5 Sprüngen so viel Raum zurück, als der Haase mit 7. In dieser Bedeutung gleichen 5 Hundssprünge 7 Haasensprüngen; oder: 1 Hundssprung $= \frac{7}{5}$ Haasensprüngen. Nun thut der Hund 4 Sprünge in der Zeit, wo der Haase 3 thut; der Hund legt also einen Raum von $4 . \frac{7}{5}$ Haasensprüngen in der Zeit zurück, in welcher der Haase einen Raum von 3 seiner Sprünge zurücklegt. Also verhalten sich die Geschwindigkeiten des Hundes und des Haasens $= 4 . \frac{7}{5} : 3$. Der Haase ist also der langsamere.

Der Haase habe nun noch x Sprünge zu thun, ehe er eingeholt wird, so ist nach der in der 74sten Aufgabe gegebenen Regel: $4 . \frac{7}{5} - 3 : 3 = 780 : x$,

$$\text{also } x = \frac{780 . 3}{\frac{28}{5} - 3} = \frac{\overset{60}{780} . 3 . 5}{10} = 900,$$

so viel Sprünge hat der Haase noch zu thun.

Durch Raisonnement.

Aus dem ersten Theil der Aufgabe ergiebt sich, daß, wenn der Haase einen Sprung gethan, der Hund $1\frac{2}{5}$

solcher Sprünge gethan hat; folglich, wenn der Haase 3 Sprünge gethan, so muß nach dem zweyten Theil der Aufgabe, der Hund $5\frac{3}{5}$ solcher Sprünge, also $2\frac{3}{5}$ mehr gethan haben; da nun $2\frac{3}{5}$ in 780 gerade 300 mal enthalten ist, so muß der Hund, um den Haasen einzuholen, 4 mal 300 Sprünge thun, in welcher Zeit also der Haase 3 mal 300 = 900 Sprünge gethan hat.

91ste Aufgabe.

Ich bin in einer zahlreichen Gesellschaft gewesen, sagt jemand, in der dreymal so viel Männer als Damen waren; und da vier Männer mit ihren Frauen weggingen, blieben noch viermal so viel Männer als Damen zurück. Wie stark ist die Anzahl von jedem Geschlecht gewesen?

Durch Raisonnement.

Anfänglich waren in der Gesellschaft dreymal so viel Männer, als Damen; würden also 4 Damen und 12 Männer, das heißt: dreymal so viel Männer als Damen weggegangen seyn, so müßten ebenfalls der übrig bleibenden Männer dreymal so viel, als der übrig bleibenden Damen seyn; nun aber bleiben 8 Männer zurück, und es sind viermal so viel Männer, als Damen, folglich müssen, nachdem 4 Männer mit ihren Frauen aus der Gesellschaft gingen, 8 Damen und 32 Männer übrig geblieben seyn.

Algebraische Auflösung.

Hier ist sowohl die Anzahl der Männer als der Damen unbekannt. Man setze also x sey die Anzahl der erstern, und y die Anzahl der zweyten.

Weil

Weil nun 4 Männer und 4 Frauen weggegangen sind, so ist $(x-4)$ die Anzahl der zurückgebliebenen Männer, und $(y-4)$ die Anzahl der zurückgebliebenen Damen. Im Anfange waren dreymal so viel Männer als Damen da.

Es ist also $x = 3y$ vermöge der ersten Bedingung.

Ferner ist nach der zweyten:

$$x - 4 = 4(y-4)$$

$$x = 3y$$

subtrahirt.

$$-4 = y - 16$$

+ 16 addirt.

folglich: $12 = y$, und also $x = 3y = 36$.

Es sind also überhaupt 36 Männer und 12 Damen in der Gesellschaft gewesen.

Probe.

In der That ist in diesem Falle die Anzahl der Männer dreymal so groß, als der Damen, und wenn 4 weggehen, so bleiben von der erstern Anzahl 32 und von der zweyten 8 übrig, folglich viermal so viel Männer als Damen.

Zweyte Auflösung.

Diese Aufgabe läßt sich auch mit einer unbekannten Größe auflösen. Es sey y die Anzahl der Damen, so ist 3y die Anzahl der Männer. Weil nun 4 Männer und 4 Damen weggehen, so bleiben $(y-4)$ Damen und $(3y-4)$ Männer. Nun soll aber die Anzahl der zurückgebliebenen Männer 4 mal so groß seyn, als die Anzahl der zurückgebliebenen Damen; folglich muß $4y - 16 = 3y - 4$, mithin $y = 12$ wie vorhin.

Diese Aufgabe läßt sich noch auf unendliche Art verändern; und wenn man sie genau untersucht, so

wird man leicht gewahr, daß sie nur ein besonderer Fall von folgender weit allgemeinern ist.

92ste Aufgabe.

Man verlangt zwey Zahlen, deren Verhältniß gegeneinander dem Verhältniß m : n gleich ist. Sie sollen ferner so beschaffen seyn, daß, wenn man von jeder die Zahl a wegnimmt, das Verhältniß der von beyden übrigbleibenden Zahlen dem Verhältniß p : q gleich ist.

Auflösung.

Man nenne die beyden Zahlen, welche man sucht, x und y; wenn man nun von jeder die Zahl a wegnimmt, so bleiben $(x - a)$ und $(y - a)$ übrig.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist nunmehro:

1) $x : y = m : n$
2) $(x-a) : (y-a) = p : q$

Aus No. 1. folgt: $y : x - y = n : m - n$
und aus No. 2. $x - y : y - a = p - q : q$

Daher $y : y - a = n(p-q) : q(m-n)$

mithin $q(m-n)y = yn(p-q) - an(p-q)$

also $an(p-q) = y[n(p-q) - q(m-n)]$

folglich $$\frac{an(p-q)}{n(p-q)-q(m-n)} = \frac{an(p-q)}{np-mq} = y$$

Aus No. 1. folgt $x = \frac{my}{n}$, daher $x = \frac{ma(p-q)}{np-mq}$;

Gesetzt, das Verhältniß m : n ist dem Verhältniß 5 : 8, und p : q dem Verhältniß 7 : 12 gleich, so muß man

in der Formel für m die Zahl 5, und für n, p, q, die Zahlen 8, 7, 12 setzen, alsdann wird, wenn $a = 4$

$$x = \frac{5 \cdot 4 (7 - 12)}{7 \cdot 8 - 5 \cdot 12} = \frac{- 20 \cdot 5}{- 4} = 25$$

und $$x = \frac{8 \cdot 4 (7 - 12)}{7 \cdot 8 - 5 \cdot 12} = \frac{- 32 \cdot 5}{- 4} = 40$$

Und es ist: $x : y = 25 : 40 = 5 : 8$,

und $x - 4 : y\ 4 = 21 : 36 = 7 : 12$

also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Anmerk. Es kann zuweilen geschehen, daß die verlangten Zahlen x und y negativ werden; z. B. es sey $a = 6$ $m : n = 2 : 5$, und $p : q = 4 : 7$. Setzt man nun in beyden Formeln diese Zahlen für die Buchstaben, so

wird $x = \frac{2 \cdot 6 (4 - 7)}{4 \cdot 5 - 2 \cdot 7} = \frac{- 2 \cdot 6 \cdot 3}{- 14 - 20} =$

$\frac{- 36}{+ 6} = - 6$, und $y = \frac{5 \cdot 6 (4 - 7)}{20 - 14} = \frac{- 5 \cdot 6 \cdot 3}{+ 6}$

$= - 15$.

Diese Zahlen erfüllen die Bedingungen der Aufgabe eben so gut, denn es ist:

$- 6 : - 15 = 2 : 5$

und $- 6 - (+ 6) : - 15 - (+ 6) = 4 : 7$

oder $- 12 : - 21 = 4 : 7$.

Sollte aber der negative Werth derselben einige Schwierigkeit verursachen, und man darüber einiges Bedenken tragen, weil man in der Aufgabe positive Zahlen gesucht hat; so bedenke man, daß in diesem Falle x und y nicht negativ werden können, als wenn $p - q$ negativ und $np - mq$ positiv; oder, wenn $p - !q$ positiv und $np - mq$, wie im vorigen Exempel, negativ ist. Im ersten Falle, wenn $p - q$ negativ

und

und np — mq positiv; oder wenn p—q positiv und np — mq, wie im vorigen Exempel, negativ ist. Im ersten Falle, wenn p—q negativ und np — mq positiv ist, so wird p — q = — 1 (q—p) und q — p ist eine positive Größe, und man kann x und y so schreiben.

$$x = \frac{-1 \cdot am\,(q-p)}{mq-np}; \text{ und } y = \frac{-1 \cdot an\,(q-p)}{mq-np}$$

Ist aber p — q positiv, und np — mq eine negative Größe, so wird mq — np eine positive Größe, und es ist np — mq = — 1 . (mq — np); zugleich kann man die vorige Größe so schreiben:

$$x = \frac{am\,(p-q)}{-1 \cdot (mq-np)}; y = \frac{an\,(p-q)}{-1 \cdot (mq-np)}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{-1 \cdot an\,(p-q)}{mp-np}; \; y = \frac{-1 \cdot an\,(p-q)}{mq-np}$$

Wenn man nun die Zahlen q, p, n, m positiv annimmt, und man will x und y auch positiv haben, so wird die Zahl a negativ genommen werden müssen. Oder man muß die Subtraktion, welche in der Aufgabe verlangt wird, in eine Addition verwandeln. Denn wenn a negativ genommen wird, so ist:

$$x = \frac{-1 \cdot -am\,(p-q)}{mq-np} = \frac{+am\,(p-q)}{mq-np}$$

$$y = \frac{-1 \cdot -an\,(p-q)}{mq-np} = \frac{+an\,(p-q)}{mq-np}$$

Wenn man hier wieder m : n = 2 : 5 und p : q = 4 : 7 nimmt, so werden die Zahlen, welche vorhin negativ waren, positiv; nämlich: $x = 6$ und $y = 15$. Dergleichen Fälle ereignen sich öfters und entspringen daher, weil die Algebra eigentlich die Subtraktion und Addition nicht von einander unterscheidet. Indessen zeigt ein geringes Nachdenken, wie man sich dabey verhalten muß.

93ste Aufgabe.

Ich habe zwey Kugelhaufen gesetzt, sagt ein Kanonier; wenn ich von dem ersten 100 weggenommen und zum zweyten gelegt hätte, so wären in diesem letztern dreymal so viel gewesen, als in dem ersten. Hätte ich aber 100 von dem zweyten genommen und zum ersten gelegt, so wären in beyden Haufen gleich viel gewesen. Man verlangt die Anzahl der Kugeln in jedem Haufen zu wissen.

Auflösung.

Man nenne die Anzahl der Kugeln im ersten Haufen x, und y die Anzahl im zweyten Haufen. Wenn nun von dem ersten 100 weggenommen werden, so bleiben darin noch $x - 100$. Setzt man nun diese 100 zu der Anzahl im zweyten Haufen, so wird die ganze Anzahl $q + 100$ seyn. Nimmt man aber von dem zweyten Haufen 100 und setzt dieselben zum ersten, so kommen hierein $x + 100$ und im zweyten Haufen bleiben $y - 100$. Die in der Aufgabe vorgetragene erste Bedingung ist also:

$3(x - 100) = y + 100$, und nach der zweyten

$x + 100 = y - 100$

subtrahirt.

bleibt: $1x - 400 = 200$

also $2x = 600$

folglich: $x = 300$ und daher $y = 500$.

Diese Zahlen erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe, welche nur ein besonderer Fall von einer weit allgemeinern ist, die so vorgetragen werden kann.

94ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt, die so beschaffen sind, daß, wenn man von der ersten die Zahl a wegnimmt und zur zweyten hinzusetzt, das Verhältniß der dadurch entstehenden Zahlen dem Verhältnisse $p : q$ gleich ist. Nimmt man aber von der zweyten die Zahl a weg und setzt sie zur ersten hinzu, so soll das Verhältniß der dadurch entstehenden Zahlen dem Verhältnisse $n : m$ gleich seyn.

Auflösung.

Es sey x die erste, y die zweyte der gesuchten Zahlen. Nach den Bedingungen soll also seyn:

1) $x - a : y + a = p : q$
2) $y - a : x + a = n : m$

Aus No. 1. folgt: $x + y : y + a = p + q : q$,

und aus No. 2.

folgt: $x + a : y + x = m : n + m$

und No. 2. ist $y - a : x + a = n : m$ diese 3 Proportionen zusammengesetzt geben $\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\}$ $y - a : y + a = n(p + q) : q(n + m)$,

ferner:

$A\ 2y : 2a = n(p + q) + q(n + m) : q(n + m) - n(p + q)$

folgl. $y = \dfrac{a[n(p + q) + q(n + m)]}{q(n + m) - n(p + q)}$

Dem Anfänger sey es zur Uebung überlassen, den Werth für x zu suchen, darum will ich hier bloß das Resultat mittheilen:

$x =$

$$x = \frac{a\,[m(p+q)+p(m+n)]}{mq - np}$$

Um dieses durch ein Exempel zu erläutern, seße man $a = 3$; $m = 6$; $n = 7$; $p = 4$, $q = 9$, so wird $p + q = 4 + 9 = 13$, und $m + n = 13$. Ferner: $mq = 54$, und $np = 28$; folglich $mq - np = 26 = 2 \cdot 13$. Also:

$$y = \frac{3.(7.13+9.13)}{2.13} = \frac{3\,(7+9)}{2} = 24, \text{ und}$$

$$x = \frac{3.(6.13+4.13)}{2.3} + \frac{3.(6+4)}{2} = 15.$$

Bey A habe ich eine Schlußart gebraucht, die ich hier rechtfertigen will. Wenn nämlich $a : b = c : d$ so soll auch $a + b : b - a = c + d : d - c$ seyn. Hiervon kann man sich nun leicht überzeugen, wenn man das Produkt der beyden äußern und der beyden mittlern Glieder macht, und nachsieht, ob diese Produkte gleich sind. Nun ist das Produkt der beyden äußern Glieder $= ad + bc + db - ac = db - ac$, weil $(ad = bc)$; das Produkt der beyden mittlern Glieder ist $= bc - ad + db - ac = db - ac$, und also die Proportion allerdings richtig.

Die hier gegebene Auflösung zeigt deutlich, was eigentlich algebraische Auflösungen sind, nämlich eine Kette von Schlüssen, oder ein auf richtige Grundsätze gegründetes Raisonnement.

95ste Aufgabe.

Es befindet sich in zwey Festungen eine unbekannte Anzahl Geschütz; nur so viel weiß man, daß

daß, wenn aus der ersten in die andere 15 Stück abgegeben werden, die letztere doppelt so viel und noch 17 mehr, als die erste habe. Führt man aber aus der andern in die erste 12 Stück, so hat die erste um zwey mehr, als die andere. Man verlangt zu wissen, wie viel Stück sich in jeder Festung befinden.

Durch Raisonnement.

Wenn man von der ersten 15 hinwegnimmt und sie der zweyten Festung zulegt, so enthält die zweyte, nach dem ersten Theil der Aufgabe, den in der ersten gebliebenen Rest 2 mal nebst 27. Nimmt man nun diese hinzugelegte 15 und, nach dem 2ten Theil der Aufgabe, noch 12, also zusammen 27 von der zweyten hinweg, und legt sie dem in der ersten gebliebenen Reste zu, so enthält die zweyte zweymal diesen Rest weniger 10, und die erste enthält diesen Rest nebst 27. Nun enthält, der Aufgabe gemäß, die erste so viel als die zweyte nebst 2, das heißt: einmal der Rest, nebst 27, ist gleich 2 mal dem Reste weniger 10 nebst 2, oder, einmal der Rest nebst 35 ist gleich zweymal dem Reste, folglich ist der Rest, welcher bleibt, nachdem man aus der ersten Festung 15 herausgenommen, gleich 35, und also die Anzahl der Stücke in der ersten Festung gleich 50. Die zweyte hat also $50 + 22 = 72$ Stück.

Algebraische Auflösung.

Es sey die Anzahl des Geschützes in der ersten Festung: = = = = $= x$
und in der zweyten = = = $= y$

Giebt man nun aus der ersten 15 Stück in die andere, so bleiben in der ersten $x - 15$, und in der andern

dern sind alsdann y + 15, wir erhalten aus der ersten Bedingung folgende Gleichung:

$$2\,(x - 15) + 17 = y + 15$$

Nimmt man aber aus der zweyten Festung 12 Stück und giebt solche in die erste, so bleiben in der zweyten y − 12 und in der ersten sind alsdann x + 12.

Die zweyte Bedingung der Aufgabe giebt uns die zweyte Gleichung:

$$x + 12 - 2 = y - 12.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der ersten ab, so bekommen wir:

$$x - 23 = 27$$

folglich $x = 50$

aus der zweyten Gleichung folgt $y = x + 22$, also $y = 72$.

Probe.

$72 + 15 = 2\,.\,(50 - 15) + 17 = 87$

und $72 - 12 = 50 + 12 - 2 = 60$.

96ste Aufgabe.

Es befinden sich auf einer Batterie zweyerley Stückkugeln, deren eigentlicher Kaliber unbekannt ist; nur weiß man, daß 10 vom stärkern und 23 vom schwächern Kaliber zusammen 654 ℔. ausmachen; ferner, daß 16 vom stärkern und 34 vom schwächern wiederum 996 ℔. am Gewicht betragen. Man verlangt das Gewicht von jedem Kaliber zu wissen.

Auflö-

Auflösung.

Es sey das Gewicht der schweren Kugeln $= x$
der leichtern Kugeln : : : $= y$

Die erste Bedingung giebt folgende Gleichung:

$10x + 23y = 654$, aus der zweyten Bedingung folgt

diese : : $16x + 34y = 996$, die obere Gleichung von der untern abgezogen, giebt $6x + 11y = 342$, diese wiederum von der obersten abgezogen,

giebt $4x + 12y = 312$ — diese mit 4 dividirt

giebt $x + 3y = 78$ — mit 10 multiplizirt

kommt $10x + 30y = 780$; von dieser Gleichung die oberste abgezogen, giebt $7y = 126$, $y = \frac{126}{7} = 18$, und da $x + 3y = 78$, so ist $x = 78 - 3y = 78 - 3 \cdot 18 = 24$.

Ich bin hier einen ganz besondern Weg gegangen, um auf eine leichte und bequeme Art die unbekannten Größen zu finden. Er verdient alle Aufmerksamkeit. — Regeln dazu sind überflüßig, da man dieses am besten durch Uebung lernt.

97ste Aufgabe.

Ein Ueberläufer, den man über die Stärke eines Detaschements, das ein gewisses Dorf besetzt hat, und über die Zahl der Häuser dieses Dorfs vernimmt, antwortet: daß er keines von beyden angeben könne, nur so viel sey ihm bekannt, daß man bey Ankunft des Detaschements 8 Mann in jedes Haus einquartiren wollen, hierbey wären 6 Häuser unbesetzt geblieben;

blieben; hierauf hätte man die Vertheilung abgeändert und nur 6 Mann in jedes Haus gelegt, so daß nach dieser neuen Vertheilung 1 Haus ohne Einquartierung geblieben. Nun frägt sichs, wie stark war das Detaschement, und wie hoch belief sich die Häuserzahl des Dorfes?

Durch Raisonnement.

Bey der zweyten Vertheilung wurde jedes Haus mit 6 Mann, also um 2 Mann weniger, als bey der ersten besetzt; da nun bey dieser Vertheilung noch 30 Mann übrig blieben, indem noch 5 Häuser mehr besetzt wurden, so müssen nothwendig bey der ersten Vertheilung 15 Häuser Einquartirung bekommen haben. Es waren also in allem 21 Häuser und 120 Mann.

Algebraische Auflösung.

Es sey die Zahl der Mannschaft x und die Häuser y. Weil bey der Vertheilung von 8 Mann auf jedes Haus 6 Häuser leer bleiben, so ist offenbar, daß die Zahl der Soldaten, mit 8 dividirt, der Zahl der Häuser weniger 6 gleich seyn wird; also hat man gleich die erste Gleichung $\frac{x}{8} = y - 6$.

Zweytens: rechnet man 6 Mann auf jedes Haus, so bleibt eins übrig, daß keine Einquartirung hat; also muß die Zahl der Soldaten, mit 6 dividirt, der Zahl der Häuser weniger Eins gleich seyn. Hieraus folgt die zweyte Gleichung $\frac{x}{6} = y - 1$. Wird nun die erste Gleichung von der zweyten abgezogen, bleibt $\frac{x}{24} = 6$, folglich $x = 5 \cdot 24 = 120$ Mann, und $y = \frac{x}{6} + 1 = 21$ Häuser.

Diese Aufgabe ist aus: „Inbegriff sämmtlicher Kriegswissenschaften. Dessau, 1786. Erster Theil,

3tes Buch (die Algebra enthaltend)" Seite 109 entlehnt. Ich habe die zweyte Bedingung etwas geändert, weil sonst die Auflösung, wie sie in jenem Buche gegeben worden, durchaus falsch ist; überhaupt ist dieses Buch eine elende Kompilation, meistens aus französischen Schriften. Die Verfasser waren: der ehemalige Königl. Preuß. Ingenieur-Hauptman Chevalier d'Estimauvilie und der Herr Chevalier Beris. Das Werk besteht aus 9 Theilen, und nach einer Nachricht, die der Chevalier Beris selbst im 9ten Theile Seite 39. giebt, ist er der alleinige Herausgeber vom 3ten bis letzten Theile.

98ste Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt bey seinem Tode einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder folgendergestalt unter sich theilen. Das erste nimmt 100 rthlr. und dazu noch den 10ten Theil des Uebrigen. Darauf nimmt das zweyte 200 rthlr. und dazu noch den 10ten Theil des Uebrigen. Nun nimmt das dritte 300 rthlr. und dazu noch den 10ten Theil des Uebrigen u. s. w. Am Ende findet sich, daß das ganze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilt worden ist. Es wird also gefragt: Wie groß das Vermögen gewesen? Wie viel Kinder hinterlassen worden? Wie viel ein jedes bekommen?

Durch Raisonnement.

Der erste nimmt 100 rthlr. vom ganzen Kapital nebst $\frac{1}{10}$ des Restes; da nun dieses $\frac{1}{10}$ offenbar um 10 rthlr.

10 rthlr. weniger ist, als $\frac{1}{10}$ des ganzen Kapitals, so beträgt das, was der erste genommen, $\frac{1}{10}$ des ganzen Kapitals nebst 90 rthlr., es bleiben also noch $\frac{9}{10}$ des Kapitals weniger 90 rthlr., von diesem nimmt der zweyte erstlich 200 rthlr. und noch $\frac{9}{100}$ rthlr. des Kapitals weniger 29 rthlr. als $\frac{1}{10}$ aus dem nunmehrigen Reste, welcher gleich ist $\frac{9}{10}$ des Kapitals weniger 290 rthlr., der zweyte hat also überhaupt $\frac{9}{100}$ des Kapitals nebst 171 rthlr. genommen, welches, der Aufgabe gemäß, gleich ist $\frac{1}{10}$ oder $\frac{10}{100}$ des Kapitals nebst 90 rthlr., folglich ist $\frac{1}{100}$ des Kapitals nebst 90 rthlr. gleich 171 rthlr. und also $\frac{1}{100}$ des Kapitals gleich 81 rthlr., woraus sich nun alles Uebrige von selbst ergiebt.

Zweyte Auflösung durch Raisonnement.

Was jedes Kind erhält, besteht aus zwey Theilen; der erste Theil besteht aus 100 rthlr., so oft genommen, als das wievielste Kind es ist, dem das Theil gehört; der zweyte Theil besteht immer aus $\frac{1}{10}$ des Restes; da nun zuletzt nichts übrig geblieben, so hat auch das letzte des Kapitals keinen zweyten Theil erhalten und hat also nur 100 rthlr. so oft erhalten, als es Kinder gewesen sind. Der erste Theil des vorletzten Kindes ist um 100 rthlr. geringer, als der erste Theil von dem letzten; sie sollen aber gleich viel gehabt haben, folglich ist der zweyte Theil des Vorletzten 100 rthlr. Da nun dieser zweyte Theil des Vorletzten $\frac{1}{10}$ des von der Erbschaft gebliebenen war, ehe er diesen Theil nahm, was er übrig ließ, ist davon $\frac{9}{10}$, was er daher ließ, gilt 9 mal diesen zweyten Theil, daß heißt: $9 \cdot 100 = 900$ rthlr. Was er aber übrig ließ, ist der Theil des letzten Kindes, das heißt 100 rthlr. so viel mal genommen, als Kinder da sind. Die Zahl der Kinder ist also 9, jedes hat $9 \cdot 100 = 900$ rthlr., und die ganze Erbschaft beträgt 8000 rthlr.

Alge-

Algebraische Auflösung.

So bald man die Größe des ganzen Vermögens und den Antheil eines jeden Kindes kennt, so bald weiß man auch die Anzahl dieser letztern, weil sie dem Quotienten gleich ist, und, durch den Antheil eines Kindes dividirt, das ganze Vermögen giebt. Es sey also das hinterlassene Vermögen $= y$, und der Antheil jedes Kindes $= x$: so erhält von den Kindern:

$$\text{Das erste } x = 100 + \frac{y - 100}{10}$$

$$\text{Das zweyte } x = 200 + \frac{y - x - 200}{10}$$

$$\text{Das dritte } x = 300 + \frac{y - 2x - 300}{10}$$

$$\text{Das vierte } x = 400 + \frac{y - 3x - 400}{10}$$

u. s. w.

Da nun alle gleich viel bekommen haben, so ist:

$$\left(100 + \frac{y - 100}{10}\right) - \left(200 + \frac{y - x - 200}{10}\right) = 0$$

$$90 + \frac{y}{10} - 180 - \frac{y}{10} + \frac{x}{10} = \frac{x}{10} - 90 = 0$$

folglich $x = 900$ rthlr. Nun war $x = 100 + \frac{y - 100}{10}$

folglich $y = 8100$ rthlr.

Die Anzahl der Kinder aber ist $\frac{8100}{900} = 9$ Kinder.

Wir wollen diese Aufgabe allgemein vortragen, weil sie bequeme Formeln giebt.

99ste Aufgabe.

Das hinterlassene Vermögen eines Vaters sey y, dieses theilen die Kinder folgendergestalt unter sich. Das erste nimmt a rthlr. und dazu noch den nten Theil des Uebrigen. Darauf nimmt das zweyte 2a und dazu noch den nten Theil des Uebrigen u. s. f., wie bey der vorhergehenden Aufgabe. Am Ende findet sich, daß jedes Kind gleich viel erhalten hat. Wie groß war das Vermögen gewesen? Wie viel Kinder hinterlassen worden? Wie viel hat ein jedes bekommen?

Auflösung.

Der Antheil jedes Kindes sey $= x$: so erhält von den Kindern:

Das erste $x = a + \frac{y - a}{n}$

Das zweyte $a = 2a + \frac{y - x - 2a}{n}$

subtrah.

$-a + \frac{x}{n} + \frac{a}{n} = 0$

und $-na + x + a = 0$

folglich $x = (n-1)a$, aus $x = a + \frac{y-a}{n}$ folgt

$y = nx - (n-1)a = n \cdot (n-1)a - (n-1)a = (n-1)^2 a$

und die Anzahl der Kinder $\frac{y}{x} = \frac{(n-1)^2 a}{(n-1)a} = n - 1$

In vorhergehender Aufgabe war $a = 100$; und $n = 10$, also die Anzahl der Kinder $= n - 1 = 10 - 1 = 9$. $x = (n-1)a = 9 \cdot 100 = 900$ und

$y = (n-1)^2 a = (n-1)(n-1)a = 9.$
$900 = 8100$, wie vorhin. Siehe den 1sten Theil, Aufg. 248.

100ste Aufgabe.

Drey Arbeiter graben in 120 Tagen einen Graben; der erste bekommt täglich 3 gr., der andere 5 gr. und der dritte 6 gr. Es erhält aber nach vollbrachter Arbeit einer so viel, wie der andere. Wie viel Tage hat jeder gearbeitet?

Auflösung.

Man setze, daß der erste x Tage gearbeitet hätte, so bekömmt er dafür $3x$ Groschen; des andern Arbeit aber sey in y Tagen geschehen, so wird er dafür $5 . y$ Groschen erhalten; also hätte der dritte $120 - x - y$ Tage gearbeitet und bekäme dafür $(120 - x - y) . 6$ gr. $= (720 - 6x - 6y)$ gr. Da nun, wie vorausgesetzt, jeder gleich viel erhält, so ist sowohl

$3x = 5y$, als auch $5y = 720 - 6x - 6y$

oder $11y = 720 - 6x$

Es ist $10y = 6x$

addirt,

$21y = 720$

folglich: $y = 34\frac{2}{7}$

und $x = \frac{5y}{3} = \frac{5}{3} \cdot 34\frac{2}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{240}{7} = \frac{400}{7} = 57\frac{1}{7}$

und endlich der dritte $120 - (57\frac{1}{7} + 34\frac{2}{7}) = 120 - 91\frac{3}{7} = 28\frac{4}{7}$.

Probe.

Der erste arbeitet	$57\frac{1}{7}$ Tage	und erhält	$57\frac{1}{7} \cdot 3$ gr. $= 171\frac{3}{7}$ gr.
Der zweyte	$34\frac{2}{7}$ "	"	$34\frac{2}{7} \cdot 5$ gr. $= 171\frac{3}{7}$ gr.
Der dritte	$28\frac{4}{7}$ "	"	$28\frac{4}{7} \cdot 6$ gr. $= 171\frac{3}{7}$ gr.

101ste Aufgabe.

In einer Gesellschaft sind anfänglich m mal so viel Männer, als Frauen. Nachdem aber n Männer mit ihren Frauen weggegangen, so bleiben p mal so viel Männer, als Frauen zurück. Wie findet man die anfängliche Zahl der Männer x und der Frauen y?

Auflösung.

Es ist einmal $x = my$

und zweytens $x - n = p(y - n)$

folglich $my - n = py - pn$

und $(m - p)y = n(1 - p)$

$$y = \frac{n(1-p)}{m-p} = \frac{n(p-1)}{p-m}$$

Regel. Um also die Anzahl der Frauen zu finden, darf man nur die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal mehr Männer als Frauen am Ende da gewesen, um 1 vermindert, mit der Anzahl der Männer, die mit ihren Frauen die Gesellschaft verließen, multipliziren, und das Produkt durch die beyden Zahlen dividiren, welche die anfängliche und letzte Menge der Männer in Vergleichung gegen die Frauen anzeigen.

Wäre z. B. $m = 5$, $n = 8$ und $p = 9$; so wäre $y = \frac{8}{4}\cdot\frac{8}{4} = 16$. Die Anzahl der Männer $= x = my$ findet sich hieraus leicht. Im angeführten Falle ist sie $5 : 16 = 80$.

Uebrigens muß hier sowohl x als y immer eine ganze Zahl seyn. Wählt man sich daher selbst beson-

dere Fälle, so muß man für m, n und p immer solche Zahlen wählen, daß entweder p – 1, oder n, oder (p – 1) n, ein vielfaches von p – m ist. Siehe die 91ste und die darauf folgende Aufgabe.

102te Aufgabe.

Es werden von einer gewissen Waare 100 ℔. zu 40 gr. verlangt. Nun sind von dieser Waare 3 Sorten, eine zu 48 gr., die zweyte zu 36 gr, die dritte zu 28 gr. Von der ersten sind 5 ℔. vorräthig. Von der zweyten Sorte ist nicht genug vorräthig, um durch Vermischung mit der ersten den gesetzten Preis zu machen. Man muß also auch von der dritten Sorte einmischen. Die Frage ist: wie viel Pfunde von der zweyten und dritten Sorte genommen werden müssen.

Auflösung.

Von der zweyten Sorte nimmt man x und von der dritten y ℔.

Der Preis von den drey verschiedenen Gewichten der eingemischten Waare muß gerade so viel ausmachen, als $40 . 100 = 4000$ gr., das ist $48 . 52 + 36x + 28y = 4000$, oder $36x + 28y = 1504$, oder $9x + 7y = 376$,

und $52 + x + y = 100$., oder $x + y = 48$, oder $7x + 7y = 336$, diese Gleichung von $9x + 7y = 376$ abgezogen, bleibt $2x = 40$; folglich $x = 20$ und $y = 48 x = 48 - 20 = 28$.

Pro=

Probe.

20 ℔.	zu 36 gr.	betragen	720 gr.
28 '	zu 28 gr.	'	784 —
52 =	zu 48 gr.	=	2496 —
		Summa =	4000 gr.

Wäre von der besten Waare nur 20 ℔. vorräthig, die man mit der zweyten Sorte vermischen wolle, von welcher nun überflüßig da sey, und daß man, erforderlichen Falls, die dritte hinzufügen wolle.

Wir werden hier auf einen Fall gerathen, der unserer Aufmerksamkeit sehr würdig und das Allgemeine in der algebraischen Auflösung deutlich entdecken wird. Die vorhin gesetzten Gleichungen verändern sich nun in diese:

$48.20 + 36x + 28y = 4000$ und $20 + x + y = 100$, also
$28.20 + 28x + 28y = 2800$
——————————————— subtrahirt
$20.20 + 8x = 1200$
$8x = 800$ ℔.
folglich $x = 100$ ℔.

Dieses Resultat ist in der That sehr unerwartet. 100 ℔. sind überhaupt nur nöthig. 20 von der besten Sorte und 100 von der schlechtern machen 120 ℔. Was wird nun aus der dritten werden? Dieses erfahren wir aus der Gleichung $20 + x + y = 100$; denn hier folgt $y = 80 - x = 80 - 100 = -20$.

Dieses ist eben so unerwartet. Von der dritten sollten also 20 ℔. aus der Mischung der beyden ersten weggenommen werden, ohne daß etwas von derselben hinzugethan wäre. Allein, man bemerke, daß in dieser Rechnung nicht die verschiedene Güte, sondern nur der Preis und die Gewichte der verschiedenen Sorten verglichen sind, und wenn man auf diese sieht, so ist es wahr, daß, wenn man 100 ℔. zu 36 gr. durch die

Unter-

Untermischung von 20 ℔. zu 48 gr. verbessert, und von dieser Mischung 100 ℔. für 40 gr. verkauft, noch 20 ℔. übrig bleiben, welche man, das ℔. für 28 gr. ohne Schaden wegschlagen kann. Dieses weiset folgende Probe aus:

20 ℔. zu 48 gr.	= =	960 gr.
100 ℔. zu 36 gr.	= =	3600 —
Summe		4560 gr.
100 ℔. verkauft zu 40 gr.		4000 —
bleiben übrig		560 gr.
20 ℔. zu 28 gr.		560 —

Man geräth sehr oft in den algebraischen Exempeln auf solche Auflösungen, die ganz unerwartet sind, und zugleich uns entdecken, daß die Aufgabe nach der gemachten Voraussetzung sich nicht ausführen lasse. Man versuche es, wie man wolle, so wird sich, wenn man nur 20 ℔. der besten Sorte zu 48 gr. hat, auf keine Art eine Mischung von allen drey Sorten der Waare machen lassen, die genau 100 ℔. gäbe, deren jedes 40 gr. werth wäre. Hätte man 34 ℔. der besten Waare, so wird $x = 65$, $y = 1$, und man darf nur 1 ℔. von der schlechten Sorte zumischen. Hätte man 32, so würde $x = 70$ und $y = -2$; und man muß wieder 2 ℔. von der Mischung der beyden ersten Waaren wegnehmen, ohne daß eine dritte hinzukommen kann. Noch ist zu bemerken, daß bey dem hier einmal festgesetzten Preis der besten Waare nie $y = 0$ werden kann, sondern entweder positive oder negative Werthe enthält.

103te Aufgabe.

Ein Kaufmann verkauft 30 Centner (von 100 ℔.) einer gewissen Waare, und 40 von einer schlech-

schlechtern Sorte, zusammen für 1260 Mark. Nachmals aber 50 Centner der bessern, und 35 der schlechtern Sorte für 1625 Mark. Die Frage ist: wie hoch hat er die 100 ℔. oder den Centner gerechnet?

Auflösung.

Der Preis der bessern Sorte sey $= x$
der schlechtern $= y$
so ist $30x + 40y = 1260$,
$50x + 35y = 1625$, oder $10x + 7y = 325$
und also $30x + 21y = 975$, diese Gleichung von $30x + 40y = 1260$ abgezogen, bleibt $19y = 285$; folglich $y = \frac{285}{19} = 15$; aus der ersten Gleichung folgt $x = 42 - \frac{4y}{3}$; also $x = 42 - \frac{4 \cdot 15}{3} = 42 - 4 \cdot 5 = 22$.

Probe.

30 Centner zu 22 Mark = 660
40 = zu 15 = = 600
Summa: 1260

50 Centner zu 22 Mark = 1100
35 = zu 15 Mark = 525
Summa: 1625

104te Aufgabe.

Ein Offizier will die gemachte Beute unter seine Leute vertheilen; er findet aber, daß, wenn er einem Mann 4 rthlr. giebt, er 20 übrig habe; hingegen, wenn er einem 5 rthlr. giebt, er 60 zu wenig habe. Wie viel Leute und Geld hat er gehabt?

Auf=

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Leute gleich x, und die Anzahl der Thaler $= y$.

Demnach haben wir folgende Gleichungen:

$4x + 20 = y$; und $5x - 60 = y$

$4x + 20 = y$

bleibt $x - 80 = 0$

folgl. $x = 80$ und daher $y = 4 \cdot 80 + 2 = 340$.

Also hat er 80 Mann und 340 rthlr. gehabt.

105te Aufgabe.

Ihr Herren, spricht ein Gastwirth zu seinen Gästen, wenn ein jeder von euch 4 rthlr. zahlte, würdet ihr 20 rthlr. weniger zahlen, als ihr schuldig seyd; zahlte aber ein jeder 5 rthlr., so würdet ihr noch 30 rthlr. zu verzehren haben. Man fragt: 1) Wie viel der Gäste; 2) wie groß ihre Schuld gewesen?

Auflösung.

Es sey die Zahl der Gäste x, ihre Schuld $= y$, so ist laut der Aufgabe:

$4x = y - 20$; und $5x = y + 30$

$4x = y - 20$ daher $y = 4 \cdot 50 + 20 = 220$.

106ste Aufgabe.

Wie alt waren wohl Pyramus und Thysbe? Wollte man von dem Alter x des Pyramus

zu

zu dem Alter y der Thysbe 5 Jahre hinzusetzen, so würden beyde gleich alt gewesen seyn. Wollte man aber von der Thysbe ihrem Alter 5 Jahre zu jenem des Pyramus zulegen; so würde dieser dreymal älter als jene gewesen seyn.

Auflösung.

Es ist, der Aufgabe gemäß, $y - 5 = x + 5$
und $y + 5 = 3x - 15$, die

obere Gleichung von der untern abgezogen } bleibt $10 = 2x - 20$

oder $30 = 2x$
folglich $15 = x$

und daher $y = x + 10 = 25$.

107te Aufgabe.

Herr, fragte jemand, welchen Lohn geben sie ihrem Gesinde? Ich, sagte jener, habe einen Diener und eine Magd. Jener bekommt jährlich 16 rthlr. mehr, als diese. Wenn ich des Dieners Lohn x mit jenem der Magd y dividire, kommen 3 zum Quotienten heraus.

Durch Raisonnement.

Da der lohn der Magd nebst 16 rthlr. gerade 13 mal so viel als ihr lohn beträgt, so müssen 16 rthlr. 12 mal und also $1\frac{1}{3}$ rthlr. gleich einmal dem lohne der Magd seyn.

Algebraische Auflösung.

Der Aufgabe gemäß ist $x - y = = 16$ und $\frac{x}{y} = 13$, also $x = 13y$, daher $13y - y = 16$; oder $12y = 16$; folglich $y = 1\frac{1}{3}$, und $x = 17\frac{1}{3}$.

108te Aufgabe.

Zwey Gesellen, A und B, kehren aus einer Spielgesellschaft zurück. Wie viel habt ihr verloren? fragt B; wenn ich noch einen Thaler im Spiele gelassen hätte, antwortet A, würde mein Verlust x zweymal so groß, als euer Gewinnst y gewesen seyn. Hätte ich aber 1 Thaler weniger, da hätte ich genau so viel verloren, als ihr gewonnen habt.

Auflösung.

Es ist $x + 1 = 2y$
$x - 1 = y$

bleibt $2 = y$ und daher $x = y + 1 = 3$.

109te Aufgabe.

Ein Herr geht mit seinem Diener folgende Bedingung ein: Bursche! wofern du dich nicht berauschest, sollst du täglich 2 gr. zu gewarten haben; widrigenfalls wird man dir für jeden Rausch 3 gr. vom Lohne abziehen. Nach Verlauf von 40 Tagen, als sie mit einander rechnen wollten, fand sich, daß einer von dem andern nichts zu fordern hatte. Man frägt nun, wie viel Tage x der Bursche berauscht, und wie viel Tage y er nüchtern während der Zeit gewesen sey.

Auflösung.

Es ist $x + y = 40$, oder $2x + 2y = 80$, nach der ersten Bedingung, und nach der zweyten ist:

$2y =$

$2y = 3x$, also $5x = 80$, folglich $x = 16$, daher $y = 40 - x = 24$.

IIote Aufgabe.

Ein Fürst braucht jährlich zum Unterhalt seiner Truppen 5694000 rthlr. Die Truppen bestehen aus 4mal mehr Infanterie als Kavallerie. Der tägliche Unterhalt eines Kavalleristen für sich, sein Pferd, Kleidung und Waffen beträgt 20 gr., und eines Infanteristen nur 8 gr. Wie stark ist die Kavallerie und Infanterie?

Auflösung.

Da das Jahr zu 365 Tage gerechnet wird, so braucht der Fürst täglich $\frac{5694000}{365} = 15600$ rthlr.

Nun sey die Anzahl der Kavalleristen $= x$, und y die Anzahl der Infanteristen, also da 20 gr. $= \frac{5}{6}$ rthlr., so ist $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = 15600$, $5x + 2y = 15600 . 6$; ferner ist $4x = y$; oder $8x = 2y$, so ist $5x + 8x = 15600 . 6$, oder $13x = 15600 . 6$; folglich $x = \frac{15600}{13} \cdot 6 = 1200 . 6 = 7200$, und also $y = 4 . 7200 = 28800$, also $x + y = 7200 + 28800 = 36000$.

IIIte Aufgabe.

Die Mannschaft zweyer Armeen verhielt sich vor der Schlacht wie 7 zu 8. In der Schlacht verlor die erste 3000 und die zweyte Armee 2000 Mann. Nun verhielt sich die Mannschaft der ersten zur Mannschaft der andern wie 6 zu 7. Wie stark war jede Armee?

Auflösung.

x sey die Mannschaft der ersten und y die der zweyten Armee.

Nach der ersten Voraussetzung ist: $x : y = 7 : 8$, also $8x = 7y$, mithin $x = \frac{7y}{8}$ und $7x = \frac{49 \cdot y}{8}$

Nach der Schlacht war die erste Armee bis auf $x - 3000$, und die zweyte bis auf $y - 2000$ Mann geschmolzen.

Und nun verhält sich $(x - 3000) : (y - 2000) = 6 : 7$,

daher $7x - 21000 = 6y - 12000$

oder $7x = 6y + 9000$; daher $\frac{49y}{8} = 6y +$ 9000, folglich $49y = 48y + 72000$; mithin $y =$ 72000 Mann und $x = \frac{7}{8} \cdot 72000 = 63000$ Mann.

112te Aufgabe.

Ein General schickt zwey Detaschements Infanterie von seiner Armee. Die Anzahl der Bataillone des ersten, nebst der Hälfte des andern, ist gleich 20, und die Anzahl des zweyten, nebst einem Drittel des ersten Detaschement, ist auch = 20. Aus wie viel Bataillonen bestehet jedes Detaschement?

Durch Raisonnement.

Aus den Bedingungen der Aufgabe, da man nämlich in beyden Fällen 20 erhält, ergiebt sich, daß die Hälfte des andern Detaschement, nebst einem Drittel des ersten, dem ersten selbst, und also die Hälfte des

andern

andern zwey Drittel des ersten Detaschement gleich ist; man erhält demnach $\frac{5}{3}$ der ersten Detaschements gleich 20, woraus sich denn alles Uebrige sehr leicht ergiebt.

Algebraische Auflösung.

x sey die Anzahl der Bataillone des ersten und y die Anzahl des zweyten Detaschement.

Vermöge der Bedingungen der Aufgabe hat man folgende zwey Gleichungen: $x + \frac{y}{2} = 20$, und $y + \frac{x}{3} = 20$;

$$\text{also } x + \frac{y}{2} = y + \frac{x}{3},$$

folglich $\frac{2x}{3} = \frac{y}{2}$, oder $4x = 3y$, aus der ersten Gleichung folgt $4x + 2y = 80$, also $5y = 80$, mithin $y = 16$, und $x = 20 - \frac{y}{2} = 20 - 8 = 12$.

113te Aufgabe.

Ein wohlthätiger Mann will eine gewisse Anzahl Friedrichsd'or geben, um eine bestimmte Zahl von Armen zu kleiden. Er findet aber, daß, wenn er 3 mehr kleiden wollte, als er bestimmte, er genöthiget wäre, die Kleidung eines jeden Armen um einen Friedrichsd'or schlechter machen zu lassen. Wollte er aber zwey weniger kleiden, so könnte er jede Kleidung um 2 Friedrichsd'or besser machen lassen. Frage: Wie viel Arme? wie viel kostet jede Kleidung? und wie groß war die Anzahl der Friedrichsd'or?

Durch

Durch Raisonnement.

Wenn von der Kleidung eines jeden Armen 1 Friedrichsd'or hinweggenommen wird, so können 3 Arme mehr gekleidet werden; es ist also der Preis einer jeden Kleidung an Friedrichsd'oren alsdann gleich einem Drittel der Anzahl der Armen, und folglich vor der Hinwegnahme gleich dem vorigen Drittel nebst einem Friedrichsd'or. Es ergiebt sich nun aus dem zweyten Theil der Aufgabe, daß, wenn zum Werth einer jeden Kleidung für $\frac{3}{3}$ Anzahl der Armen weniger 2, zweyer eben solcher Drittel Friedrichsd'or nebst 2 hinzugelegt werden, eine jede Kleidung um 1 Friedrichsd'or theurer ist; es muß also nothwendig $\frac{1}{3}$ Anzahl der Armen weniger 2, gleich 2 und also die Anzahl der Armen selbst gleich 12, der Werth einer jeden Kleidung gleich 5 Friedrichsd'or und die Anzahl der Friedrichsd'or gleich 60 seyn.

Algebraische Auflösung.

Es sey x die Zahl der Armen, und y der Preis einer Kleidung. So ist klar, daß xy gleich der Summe ist, welche ihm die Armen zu kleiden kosten.

Wenn die Zahl der Armen um 3 zugenommen hätte, so würde jede Kleidung $\frac{xy}{x+3}$ kosten. Wenn sie aber um zwey abgenommen hätten, so würde jede Kleidung $\frac{xy}{x-2}$ kosten.

Im ersten Fall hat man, vermöge der Aufgabe, $\frac{xy}{x+3} = y - 1$; und im zweyten $\frac{xy}{x-2} = y + 1$.

$$\text{Also } \frac{xy}{x-2} + \frac{xy}{x+3} = (y+1) + (y-1)$$

$$xy\,[x + 3 + (x-2)] = 2y(x-2)(x+3)$$

mit y dividirt

giebt $2x^2 + x = 2x^2 + 2x - 12$;

folglich: $x = 12$, und $y = 5$.

114te Aufgabe.

Ein Kaufmann hat zwey Wechsel; diese betragen zusammen 1643 französische Livres; den ersten verkauft er für 5 Livres franzöſ., 3 Livres Genfer Courant und den zweyten für 8 Livres franzöſ., 5 Livres Genfer Courant. Für beyde erhielt er die Summe von 1000 Livres Courant. Wie viel beträgt ein jeder Wechsel in jeder der angegebenen Münzsorten?

Auflösung.

Es sey x die Summe der französischen Livres, welche im Verhältniß von 5 zu 3 verhandelt, und y diejenige Summe, die im Verhältniß von 8 zu 5 verwechselt sind.

So ist $x + y = 1643$;

ferner: $5 : 3 = x : \frac{3x}{5}$ und $8 : 5 = y : \frac{5y}{8}$

und $\frac{3x}{5} + \frac{5y}{8} 1000 =$, oder $24x + 25y = 40000$.

Da $x + y = 1643$, so ist auch $25x + 25y = 41075$.

Die obere Gleichung von der untern subtrahirt, giebt: $x = 1075$, folglich $y = 1643 - 1075 = 568$.

Probe.

$x =$	1075 à 5 für 3, giebt	645
$y =$	568 à 8 für 5, giebt	355
	1643	1000.

115te Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, wenn man zu ihrer Summe ihre Differenz addirt, so kommt ihr Produkt heraus; wenn man aber von ihrer Differenz auch die kleinere subtrahirt, so kommt ihr Quotient heraus.

Durch Raisonnement.

Das Produkt enthält, nach dem ersten Theil der Aufgabe, 2 mal die kleinere nebst 2 mal die Differenz; da nun in jedem Produkte zweyer ungleicher Zahlen, die kleinere sowohl als die Differenz so oft enthalten ist, als die Einheit in der kleinern, so muß hier die kleinere Zahl gleich zwey seyn, und da ferner, wenn nach dem zweyten Theil der Aufgabe, 2 von der Differenz hinweg genommen wird, die Hälfte der größern Zahl übrig bleibt, so muß, weil die größere aus der kleinern und der Differenz besteht, die größere gleich 8 seyn.

Algebraische Auflösung.

Die größte der gesuchten Zahlen sey x und die kleinere gleich y, so ist ihre Summe $= x + y$

und ihre Differenz $= x - y$ addirt

kommt $2x$

Nun soll $2x = xy$ seyn, also $2 = y$

ferner soll seyn $x - 2y = \frac{x}{y}$, also $x - 4 = \frac{x}{2}$,

daraus folgt $x = 8$.

116te Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, wenn man zu ihrer Summe ihre Differenz addirt, so kommt ihr Pro-

Produkt heraus; subtrahirt man aber die Differenz von der Summe, so kommt ihr Quotient heraus.

Durch Raisonnement.

Da der erste Theil dieser Aufgabe dem der vorigen gleich ist, so ist auch hier die kleinere gleich 2. Nun ist, nach dem zweyten Theil dieser Aufgabe, die Hälfte der größern Zahl gleich 2 mal der kleinern, folglich ist die größere gleich 8.

Algebraische Auflösung.

Die größte Zahl sey x, die kleinste y.

So ist $x + y$ ihre Summe, und
$x - y$ ihre Differenz.

Zusammen addirt, geben sie: $2x$ und von einander subtrahirt $2y$.

Nun soll $2x = xy$ seyn, also $2 = y$;

ferner $2y = \frac{x}{y}$; also $4 = \frac{x}{2}$; folglich $x = 8$.

Dieses würde man auch ohne Algebra haben finden können.

Merkwürdig ist es, daß hier in der 115ten und 116ten Aufgabe zwey Zahlen gefunden werden, ohne daß irgend eine gegeben war. Der allgemeine Begriff vom Rechnen ist also nicht: aus gegebenen Zahlen andere finden. Man findet auch Zahlen aus ihrem gegebenen gegenseitigen Verhalten. Auch ist zu bemerken, daß beyde vorhergehende Aufgaben einerley Resultat geben.

117te Aufgabe.

Es verzehrt jemand auf seiner Reise sein ganzes Vermögen. In dem ersten Lande verzehrt er a und noch den bten Theil von dem übrigen, in dem zweyten verzehrt er 2a und wiederum den bten Theil von dem übrigen u. s. w., bis sein Vermögen aufgezehrt war. Es ist die Frage, wie groß sein Vermögen war und wie viel Länder er besehen hat? angenommen, er habe in jedem Lande gleich viel verzehrt.

Auflösung.

Sein Vermögen sey x, und die Zahl der besuchten Länder $= y$.

Er hat also verzehrt:

Im ersten Lande $a + \frac{x - a}{b} = A$.

Im zweyten Lande $2a + \frac{a - 2a - A}{b} = 2a + \frac{x - 3a - \left(\frac{x-a}{b}\right)}{b}$, also muß $a + \frac{x-a}{b} = 2a + \frac{x - 3a - \left(\frac{x-a}{b}\right)}{b}$

und $x - a = ab + x - 3a - \left(\frac{x-a}{b}\right)$.

$$2a = ab - \left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$2ab = ab^2 - x + a$$

folglich $x = ab\,(b - 2) + a = a\,(b^2 - 2b + 1) = a\,(b - 1)^2$. In jedem Lande verzehrte er $a + \frac{x - a}{}$

$$\frac{x-a}{b} = \frac{a(b-1)+x}{b} = \frac{a(b-1)+a(b-1)^2}{b}$$

$$= \frac{a(b-1)(1+b-1)}{b} = a(b-1).$$

Da er nun y Länder besucht hat, so ist seine Verzehrung überhaupt $ya(b-1) = a(b-1)^2$; folglich $y = b-1$. Es sey $a = 1000$; $b = 3$; so ist $y = 3- = 2$ Länder und $x = 2^2 . 1000 = 4000$.

Diese Aufgabe, so wie mehrere andere, habe ich aus Kochs vollständigem Rechenbuche, Dresden, 1783. 4ter Theil, Seite 613, entlehnt Herr Koch giebt zwar eine richtige Auflösung dieser Aufgabe; allein er giebt für x und y keine so bequeme Formeln, wie ich, — aber hierin liegt ja eigentlich die Kunst des Analysten — was hilft mir eine Formel, deren Anwendung mich ermüdet. Siehe die 99ste Aufgabe.

118te Aufgabe.

Es begegneten jemandem einige Bettler, die ihn um ein Almosen ansprachen; er antwortete ihnen: wäret ihr nur eine halbe Stunde früher gekommen, so hätte ich einem jeden a gr. geben können, denn ich habe eben erst c rthlr ausgegeben, und hätte doch noch b gr. übrig behalten, nun kann ich euch nicht mehr als jedem d gr. geben, und so bleibt mir nicht einmal ein Heller übrig Nun ist die Frage: wie viel Bettler sind da gewesen? und wie viel Geld hat er zuletzt gehabt?

Auflösung.

Gesetzt, es seyen y Bettler gewesen, und er habe noch x gr. gehabt. Hätte er einem jedem d gr. gegeben, so wäre ihm nichts übrig geblieben, also wäre $dy = x$; vorher hatte er $x + c$, und wenn er alsdann jedem a gr. gegeben hätte,

so wäre: $a\,y = x + c - b$ { (denn b gr. hatte er noch übrig)

$$\frac{d\,y = x}{(a - d)\,y = c - b}$$

bleibt

folglich $y = \frac{c - b}{a - d}$

Es sey: $a = 3$; $b = 8$; $c = 2$ rthlr. $= 48$ gr.; $d = 2$; so ist $y \frac{48 - 8}{3 - 2} = 40$ Bettler, und $x = 2$. $40 = 80$ gr. $= 3$ rthlr. 8 gr. am Gelde.

119te Aufgabe.

Ein Commendant wird gefragt: wie viel er Soldaten in der Festung hat? worauf er antwortet: Ich habe a mal so viel zu Fuß, als zu Pferde, und diese alle zusammengenommen, sind b mal so viel über c, als die Reuter unter c. Nun ist die Frage: wie viel Reuter und Fußvolk er hatte?

Auflösung.

Gesetzt, er habe x Mann zu Fuß und y zu Pferde gehabt, so ist $x = ay$. Der Reuter unter c sind $c - y$, und die über c betragen alle zusammen $x + y - c$. Dieses ist b mal so viel, als $c - y$, also $x + y - c =$

bc –

$bc - by$; oder $ay + y - c = bc - by\ (a + b + 1)$
$y = c\ (b + 1)$;

folglich: $y = \frac{c\ (b + 1)}{a + b + 1}$

Es sey $a = 3$; $b = 4$; $c = 2000$;

so ist $y = \frac{2000 \cdot (4 + 1)}{3 + 4 + 1} = \frac{2000 \cdot 5}{8} = \frac{10000}{8} = 1250$

und $x = 3 \cdot 1250 = 3750$.

Probe.

Offenbar ist $3750 = 3 \cdot 1250$, und $1250 + 3750 = 5000$; also $5000 - 2000 = 3000$ und $2000 - 1250 = 750$, und $4 \cdot 750 = 3000$.

120ste Aufgabe.

Einer will a Ellen Tuch kaufen, er erschrickt aber, wie er den Preis vernimmt und sagt: vor einigen Jahren konnte ich für das Geld, was ich bey mir habe, d mal so viel kaufen und hatte noch b Thaler übrig; nun muß ich noch b Thaler dazu haben, wenn ich dieses will. Nun ist die Frage: wie theuer war jetzt die Elle Tuch? und wie viel Geld hat er bey sich gehabt?

Algebraische Auflösung.

Er habe x rthlr. bey sich gehabt, und die Elle Tuch koste y rthlr. Da er nun vor einigen Jahren d mal so viel für eben das Geld hätte kaufen können, so muß auch die Elle d mal wohlfeiler gewesen seyn, da sie nun jetzt y kostet, so hat sie damals nur $\frac{y}{d}$ gegolten.

a Ellen

a Ellen zu y rthlr., die jetzt ay kosten, hätten ehedem nur $\frac{ay}{d}$ gekostet.

Um aber ay rthlr. auszugeben, fehlen ihm b rthlr., also ist $ay = b + x$, wenn er aber nur $\frac{ay}{d}$ ausgeben soll, so hat er noch b rthlr. übrig, also $\frac{ay}{d} = x - b$; diese Gleichung von $ay = b + x$ abgezogen, giebt $ay\left(1 - \frac{1}{d}\right) = 2b$; oder $ay\left(\frac{d-1}{d}\right) = 2b$; folglich $y = \frac{2bd}{a(d-1)}$. Ehedem kostete die Elle nur $\frac{y}{d} = \frac{2b}{a(d-1)}$

Es sey $a = 12$; $b = 24$; $d = 3$;

so ist $y = \frac{2 \cdot 24 \cdot 3}{12(3-1)} = 2 \cdot 3 = 6$ rthlr. Daher $x = ay - b = \frac{2bd}{d-1} - b = \frac{2bd - bd + b}{d-1} = \frac{b(d+1)}{d-1}$ in Zahlen $\frac{24 \cdot (3+1)}{3-1} = 48$ rthlr. Der ehemalige Preis einer Elle war $\frac{6}{3} = 2$ rthlr.

Durch Raisonnement.

Der jetzige Preis übertrifft den ehemaligen um $(d-1) \cdot a$. Da man nun zum ehemaligen Preise von ad Ellen noch 2b hinzulegen muß, um a Ellen nach dem jetzigen Preise bezahlen zu können, so muß ehemals jede Elle $\frac{2b}{a(d-1)}$ gekostet haben; jetzt muß daher jede Elle $\frac{2bd}{a(d-1)}$ kosten. a Ellen kosten also jetzt $\frac{2bd}{d-1}$

$\frac{2bd}{d-1}$, folglich muß er $\left(\frac{2bd}{d-1} - 1\right)$ rthlr. bey sich gehabt haben.

121ste Aufgabe.

Ein Kaufmann vertauscht ein Stück Tuch, welches a Ellen hält, gegen 2 Stück schlechteres. Das eine von den schlechtern Stücken, schwarz von Farbe, hält b Ellen, das andere von den schlechtern ist blau, und hält c Ellen. Eine Elle vom schwarzen kostet so viel, als eine Elle von dem blauen; für das schwarze gab er d Ellen und erhielt noch e Thaler; für die noch übrigen a - d Ellen erhielt er das blaue Stück Tuch. Nun ist die Frage: was kostet eine Elle von dem bessern, und was von dem schlechtern?

Durch Raisonnement.

Da der Preis der schlechtern Tücher sich gleich ist, und er ferner für (a - d) Ellen des bessern c Ellen, also $\frac{c}{a-d}$ mal so viel des schlechtern Tuches erhalten hat, müßte er auch für d Ellen des bessern, $\frac{dc}{a-d}$ Ellen des schlechtern erhalten, nach der Aufgabe aber erhält er b Ellen nebst e rthlr.; folglich muß e rthlr. der Preis von $\frac{dc}{a-d} - b$ Ellen, und also $\frac{e}{\frac{dc}{a-d} - b}$ rthlr. der Preis von einer Elle des schlechtern seyn. Es kosten also c Ellen des schlechtern $\frac{ce}{\frac{dc}{a-d} - b}$ rthlr., so viel müssen

nun

nun nach der Angabe auch (a – d) Ellen des bessern gekostet haben; folglich kostet eine Elle des bessern Tuches

$$\frac{1}{a-d} \cdot \frac{ce}{\frac{dc}{a-d} - b} = \frac{ce}{dc-(a-d)b} \text{ rthlr.}$$

Algebraische Auflösung.

Die Elle von dem bessern Tuche koste x rthlr. und die von dem schlechtern y rthlr., alsdann kosten d Ellen des bessern offenbar dx, und a – d Ellen kosten $ax - dx$; ferner b Ellen des schwarzen kosten by, und c Ellen blau Tuch kosten cy.

Laut der Aufgabe muß nun seyn:

$dx = by + e$ und $ax - dx = cy$; also:
$cdx = bcy + ce$ und $abx - bdx = bcy$; diese Gleichung von der vordern abgezogen,

giebt $(cd + bd - ab)\,x = ce$

folglich $x = \frac{ce}{cd - b(a-d)}$

Da $(a-d)\,x = cy$; so ist $y = \frac{(a-d)\,e}{cd - b(a-d)}$

Es sey $a = 40$; $b = 50$; $c = 30$; $d = 30$; $e = 40$; so ist $x = \frac{30 \cdot 40}{30 \cdot 30 - 50(40-90)} = \frac{3 \cdot 4}{9 - 5} = 3$ rthlr.; und $y = \frac{(40 - 30)\,40}{300 - 500} = \frac{400}{900 - 500} = 1$ rthlr.

122ste Aufgabe.

Ein Hauptmann stellt seine Truppen in drey Glieder, da bleiben ihm zwey Mann übrig, er macht die Glieder noch einmal so groß und for-

formirt nur zwey Glieder, da fehlen ihm aber 10 Mann, nun ist die Frage: wie viel waren in einem Gliede? und wie viel Truppen hat er gehabt?

Algebraische Auflösung.

Die Anzahl der Truppen sey x, und das erste Mal sollen y Männer in einem Gliede gewesen seyn, so stehen das zweyte Mal $2y$ Männer in einem Gliede.

Das erste Mal stehen also in den drey Gliedern $3y$, und es sind ihm 2 Leute übrig geblieben, also ist $3y = x - 2$.

Das zweyte Mal stehen in den zwey Gliedern $4y$, allein nun fehlen ihm 10 Mann, also ist auch:

$$4y = x + 10$$

Es war $3y = x - 2$

folglich $y = 12$ und $x = 3y + 2 = 38$.

Durch Raisonnement.

Beym zweyten Arrangement bestehet das erste Glied aus zwey Gliedern der vorigen Ordnung, und es bleibt also für das zweyte Glied die Hälfte der ersten nebst 2 Mann übrig; da nun zur Ergänzung dieses Gliedes noch 10 Mann fehlen, so müssen 12 Mann gleich der Hälfte eines jeden Gliedes seyn, und es enthält demnach, beym ersten Arrangement ein jedes der dreyen Glieder 12 Mann, und also die ganze Truppe 38 Mann.

123ste Aufgabe.

Was sind das für zwey Zahlen, wenn man zu der ersten a addirt und von der zweyten b subtrahirt;

trahirt; ingleichen: wenn man die erste mit c und die zweyte mit d multiplizirt, daß im ersten Fall die Summe und der Rest, im andern Fall aber beyde Produkte einander gleich sind?

Auflösung.

Die erste Zahl sey x, die zweyte y, so ist:

$$x + a = y - b; \text{ und } cx = dy$$

daher $dx + ad = dy - bd$; diese Gleichung von $cx = dy$ abgezogen,

läßt $(c - d)\,x - ad = bd$, also $x = \frac{(a + b)\,d}{c - d}$

und da $dy = cx$, so ist $y = \frac{cx}{d} = \frac{(a + b)\,c}{c - d}$

Es sey $a = 3$, $b = 6$, $c = 10$; und $d = 8$, so ist $x = \frac{(3 + 6)\,8}{10 - 8} = 9 \cdot 4 = 36$, und $y = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$. Hieher gehört folgende Aufgabe.

124ste Aufgabe.

Einer kaufte zweyerley Waare; hätte er 1 ℔. von der erstern um 20 gr. theurer und 1 ℔. von der andern um 15 gr. wohlfeiler bekommen, so würden beyde Preise gleich gewesen seyn; und hätte er von der erstern 12 ℔ und von der andern 7 ℔. genommen, so hätte er für eine Waare so viel, als für die andere bezahlen müssen. Wie hoch ist ein ℔. jeder dieser Waare gekommen?

Auflösung.

Von der ersten Waare habe das ℔. x gr., und von der zweyten y gr. gekostet. Man wird leicht einsehen,

sehen, daß aus der vorhergehenden Aufgabe a = 20 gr., b = 15 gr., c = 12 ℔. und d = 7 ℔.; folglich $x = \frac{(20+15)\cdot 7}{12-7} = 49$ gr. und $y = \frac{35}{5} \cdot 12 = 84$ gr. Auch folgende Aufgabe gehört hieher.

Durch Raisonnement.

Aus dem ersten Theil der Aufgabe erhellet, daß die andere Waare um 35 gr. theurer ist, als die erste; folglich kosten 7 ℔. der andern 245 gr. mehr, als 7 ℔. der ersten Waare; es müssen also, nach dem zweyten Theil der Aufgabe, 5 ℔. der erstern Waare 245 gr., und demnach 1 ℔ derselben 49 gr., so wie ein ℔. der andern Waare 84 gr. kosten.

125ste Aufgabe.

Ein Hauptmann hatte unter seinen Befehlen 60 Mann Grenadier, und 80 Mann Musquetier, jene bekommen zusammen täglich so viel, als diese; rechnet man für einen Grenadier 2 kr. weniger, und für einen Musquetier 3 kr. mehr, so bekäme einer so viel, als der andere. Wie viel hat ein Grenadier und ein Musquetier täglich bekommen?

Auflösung.

Der tägliche Sold des Grenadiers sey x und des Musquetiers = y, so ist aus der 123sten Aufgabe a = 2 kr., b = 3 kr., c = 80 Mann, und d = 60 Mann, also:

$x = \frac{(2+3)\cdot 60}{80} = \frac{5\cdot 80}{60} = 15$ kr. und $y = \frac{5\cdot 80}{20} = 20$ kr.

126ste Aufgabe.

Was sind das für Zahlen? Wenn ich zu der ersten a addire, so wird sie um b mal der zweyten Zahl größer, als die zweyte. Addire ich aber a zur zweyten, so wird diese zweymal so groß, als die kleinere.

Auflösung.

Die erste Zahl nenne man x und die zweyte y. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt:

$$x + a - by = y \text{ und } y + a = 2x,$$

$$\begin{array}{lll} \text{also} & 2x + 2a - 2by = 2y & \\ \text{und} & 2x = y + a & \text{subtrahirt} \end{array}$$

$$2a - 2by = y - a$$

$3a = (2b + 1)y$; folglich $y = \frac{3a}{2b+1}$, und $x = \frac{\left(\frac{3a}{2b+1} + a\right)}{2} = \frac{(b+2)\,a}{2b+1}$. Folgende drey Aufgaben mögen als Beyspiele dienen.

127ste Aufgabe.

Als einer nach dem Werthe zweyer Tabattieren gefragt wurde, antwortete er: In der kleinern liegen 18 Dukaten, und darum ist sie um den vierten Theil des Werths der größern Tabattiere mehr werth, als die größere; thut man aber die 18 Dukaten in die größere Tabattiere, so wird solche noch einmal so viel

werth

werth seyn, als die kleinere. Wie viel war jede Tabattiere ohne die Dukaten werth?

Auflösung.

Der Werth der kleinern Tabattiere sey = x, der Werth der größern = y; ferner ist aus der vorhergehenden Aufgabe a = 18 Dukaten, b = $\frac{1}{4}$; so ist y = $\frac{3 \cdot 18}{2 \cdot \frac{1}{4} + 1} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 18}{3}$ = 36 Dukaten und x = $\frac{(\frac{1}{4} + 2)\, 18 \cdot 2}{3} = (\frac{1}{4} + 2) \cdot 6 \cdot 2 = 9 \cdot 3 =$ 27 Dukaten.

Durch Raisonnement.

18 Dukaten enthalten, nach dem ersten Theile der Aufgabe, $\frac{5}{4}$ der Differenz des Werthes beyder Tabattieren, nebst $\frac{1}{4}$ des Werths der kleinern; nun ist, nach dem zweyten Theil der Aufgabe, der Werth von $\frac{5}{4}$ der kleinern, nebst $\frac{2}{4}$ der Differenz, gleich 2 mal dem Werthe der kleinern, und also der Werth von $\frac{1}{4}$ der kleinern nebst $\frac{2}{4}$ der Differenz, gleich dem Werth der kleinern, mithin $\frac{2}{4}$ der Differenz gleich $\frac{3}{4}$ des Werths der kleinern, das heißt: $\frac{3}{4}$ der Differenz gleich $\frac{1}{4}$ der kleinern; demnach erhalten 18 Dukaten $\frac{8}{4}$, oder 2 mal die Differenz, woraus man nun sehr leicht 27 Dukaten für den Werth der kleinern und 36 Dukaten für den Werth der größern Tabattiere findet.

128ste Aufgabe.

Ein Ingenieur fragte einen Offizier, welcher zwey Rekruten angeworben hatte, wie viel er jedem Handgeld gegeben? worauf er antwortete:

Der

Der eine ist etliche Zoll höher, als der andere; und wenn ich dem Kleinern 30 fl. mehr gegeben hätte, so hätte er $\frac{2}{5}$ vom Handgelde des Größern mehr, als der Größere bekommen; hätte ich aber dem Größern 30 fl. mehr gegeben, so hätte er noch einmal so viel als der Kleinere bekommen. Verstehet der Herr nun die Algebra, so kann er erfahren, wie viel einer erhalten hat.

Auflösung.

Wird das Handgeld des Kleinern $= x$, und das Handgeld des Größern $= y$ angenommen, so ist hier $a = 30$ fl. und $b = \frac{2}{5}$.

Es ist daher $y = \frac{3 \cdot 30}{2 \cdot \frac{2}{5} + 1} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 5}{9} = 50$ fl.

und $x = \frac{(\frac{2}{5} + 2)\, 30 \cdot 5}{9} = \frac{12 \cdot 30}{9} = 4 \cdot 10 = 40$ fl.

129ste Aufgabe.

A und B hatten eine Summe Geld zu theilen, so daß, wenn man zu des A seinem Theil noch 48 rthlr. legte, er $\frac{5}{6}$ von des B Antheil mehr, als B, und wenn man zu des B Antheil 48 rthlr. thut, solcher noch einmal so viel als A hätte. Wie viel war eines jeden Antheil?

Auflösung.

Des A Antheil sey x, und des B Antheil y; ferner ist hier $a = 48$ rthlr. und $b = \frac{5}{6}$.

Folg-

Folglich $y = \frac{3 \cdot 48}{2 \cdot \frac{5}{6} + 1} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 48}{8} = 3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ rthlr.

und $x = \frac{(\frac{5}{6} + 2) \cdot 48 \cdot 3}{8} = \frac{(\frac{5}{6} + 2)}{} 6 \cdot 3 = 17 \cdot =$

51 rthlr.

130ste Aufgabe.

Einer kaufte von dreyerley Waaren, als: von A, B und C zusammen 70 ℔. und bezahlte für 1 ℔. von A 30 gr., für 1 ℔. von B 20 gr., und für 1 ℔. von C 16 gr. Da er nun für eine Waare so viel als für die andere bezahlte, so ist die Frage: wie viel Pfund derselbe von jeder Sorte gekauft hat?

Durch Raisonnement.

Es ergiebt sich sogleich, daß 2 ℔. von A am Werthe gleich ist 3 ℔. von B, und auch gleich $3\frac{3}{4}$ ℔ von C, man braucht also nur zu untersuchen, wie oft $\frac{3}{4}$ ℔. in 70 ℔. enthalten ist, wo dann der Quotient 8 anzeigt, daß von A 8 mal 2 ℔. oder 16 ℔., von B 8 mal 3 ℔. oder 29 ℔., und von C 8 mal $3\frac{3}{4}$ ℔. oder 30 ℔. gekauft worden sind.

Algebraische Auflösung.

Von der Waare A x ℔., von B y ℔., also von C $70 - x - y$ ℔.

Die von A kostet ihm also $30 \cdot x$, die von B $20 \cdot y$, und die von C $16\,(70 - x - y) = 1120 - 16x - 16y$.

Laut den Bedingungen ist $30 . x = 20 . y$ und $20y = 1120 - 16x - 16y$, oder $36y = 1120 - 16x$, aus der ersten Gleichung folgt $y = \frac{3}{2} x$, diesen für y gefundenen Werth in die zweyte Gleichung gesetzt, giebt $36 . \frac{3}{2} x = 1120 - 16x$, oder $54x = 1120 - 16x$, oder $70x = 1120$; folglich $x = 16$ ℔., und $y = \frac{3}{2} . 16 = 24$ ℔., daher von $C = 70 - 24 - 16 = 30$ ℔.

131ste Aufgabe.

Einer hat 118 Stück von dreyerley Geldsorten, als: Dukaten zu 5 fl., Carolinen zu 11 fl. und Souverainen zu 15 fl.; es beträgt aber eine jede Sorte so viel Gulden, als die andere. Wie viel Stücke sind es von jeder Sorte?

Auflösung.

Die Anzahl der Dukaten sey $= x$, die der Carolinen $= y$, so ist die Anzahl der Souverainen $= 118 - x - y$.

Demnach ist $5x = 11 . y$ und $5x = 15 (118 - x - y)$, oder $x = 354 - 3x - 3y$, oder $4x = 354 - 3y$, oder $20x = 1770 - 15y$, und, da $5x = 11y$, so ist auch $20x - 44y$, also $44y = 1770 - 59y$ und $599 = 1770$; folglich $y = 30$ Carolinen, aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{11}{5} y = \frac{11}{5} . 30 = 66$ Dukaten und endlich die Anzahl der Souverains $= 118 - 30 - 66 = 22$.

132ste Aufgabe.

Ambrosius sagte zum Bernhardus: Wenn du mir von deinem Gelde ein Drittheil und noch 3 fl.

3 fl. gäbest, so hätte ich dreymal so viel, als dir übrig bliebe. Bernhardus antwortete: Und wenn du mir von deinem Gelde die Hälfte gäbest und noch 2 fl. dazu, so hätte ich neunmal so viel, als dir übrig bliebe. Wie viel hat jeder gehabt?

Durch Raisonnement.

Ambrosius nimmt $\frac{1}{3}$ des Geldes von Bernhardus nebst 3 fl.; folglich bleibt dem Bernhardus $\frac{2}{3}$ seines Geldes weniger 3 fl., und dieses dreymal genommen, das heißt: $\frac{6}{3}$ weniger 9 fl. macht das nunmehrige Geld von Ambrosius aus, Ambrosius muß also anfänglich $\frac{6}{3}$ des Geldes von Bernhardus weniger 12 fl. gehabt haben, nun nimmt Bernhardus die Hälfte des Geldes von Ambrosius nebst 2 fl., d. i. $\frac{6}{6}$ des Geldes von Bernhardus weniger 4 fl; folglich bleibt dem Ambrosius $\frac{5}{6}$ des Geldes von Bernhardus weniger 8 fl., und dieses 9 mal genommen, d. h $\frac{45}{6}$ des Geldes von Bernhardus weniger 72 fl., ist gleich $\frac{11}{6}$ dieses Geldes weniger 4 fl. als das nunmehrige Geld von Bernhardus, d. h., wenn man von $\frac{45}{6}$ 68 fl. wegnimmt, so bleiben $\frac{11}{6}$; folglich sind $\frac{11}{6}$ nebst 68 fl. gleich $\frac{45}{6}$ und also $\frac{34}{6}$ gleich 68 fl., oder $\frac{1}{6}$ des Geldes von Bernhardus gleich 2 fl. u. s. w.

Algebraische Auflösung.

Des Ambrosius Geld sey $= x$, des Bernhardus Geld $= y$, so ist $x + \frac{1}{3}y + 3 = 3(y - \frac{1}{3}y - 3)$ $= 3y - y - 9 = 2y - 9$, oder $3x + y + 36 = 6y$, oder $3x + y + 36 = 6y$ oder $3x + 36 = 5y$.

ferner ist auch $y + \frac{1}{2}x + 2 = 9(x - \frac{1}{2}x - 2) = \frac{9}{2}x - 18$

oder $y + 20 = 4x$

und $5y + 100 = 20x$
aber $5y = 3x + 36$

bleibt $100 = 17x - 36.$

Daher $136 = 17x$
folglich $8 = x$, und $y = 4x - 20 = 4 \cdot 8 - 20 = 12.$

133ste Aufgabe.

Als ein Schäfer um die Anzahl seiner Schaafe und Hammel befragt wurde, antwortete er: Thue ich von den Hammeln $\frac{2}{5}$ und 10 Stück zu den Schaafen, so machen solche dreymal so viel Stück zusammen, als Hammel übrig bleiben; thue ich aber von den Schaafen $\frac{3}{10}$ und noch 20 Stück zu den Hammeln, so machen solche so viel Stücke zusammen, daß $\frac{1}{3}$ derselben so viel sind, als von den Schaafen übrig bleiben. Wie viel Stücke waren es von jeder Gattung?

Durch Raisonnement.

Man schließe nach der Auflösung der 132sten Aufgabe; nämlich: den Schaafen werden $\frac{2}{5}$ von den Hammeln nebst 10 Stück hinzugelegt, folglich bleiben $\frac{3}{5}$ von den Hammeln weniger 10 Stück zurück, und dieses dreymal genommen, d. i. $\frac{9}{5}$ weniger 30 Stück machen die Anzahl der zusammengenommenen Stück Schaafe und Hammel aus; es muß also die Anzahl der Schaafe gleich seyn $\frac{7}{5}$ von den Hammeln weniger 40 Stück, hiervon wird nun, nach dem zweyten Theile der Aufgabe, $\frac{3}{10}$ nebst 20 Stück genommen und den Hammeln zugelegt, es bleiben also die Anzahl der Schaafe gleich $\frac{42}{50}$ von den Hammeln weniger 48 Stück, und dieses

3 mal genommen, d. i. $\frac{147}{50}$ von den Hammeln weniger 144 Stück, ist gleich $\frac{71}{50}$ von den Hammeln nebst 8 Stück, d. h., wenn man 144 Stück von $\frac{76}{50}$ hinweg nimmt, so bleiben 8; folglich ist $\frac{76}{50}$ von den Hammeln gleich 152, und es müssen also 100 Hammel gewesen seyn.

Algebraische Auflösung.

Nennt man die zu suchende Anzahl der Schaafe x, die Hammel y, so muß $x + \frac{2}{5}y + 10 = 3(y - \frac{2}{5}y - 10)$,

oder $5x + 2y + 50 = 15 - 6y - 150$
oder $5x + 200 = 7y$, also $50x + 2000 = 70y$.

Ferner ist $y + \frac{3}{10}x + 20 = 3(x - \frac{3}{10}x - 20)$

oder $10y + 3x + 200 = 21x - 600$
oder $10y + 800 = 18x$

(7

$70y + 5600 = 126x$
und $70y = 50x + 2000$

bleibt $5600 = 76x - 2000$
oder $7600 = 76x$
folglich $100 = x$

Da $7y = 5x + 200$, so ist $y = \frac{5x + 200}{7} =$
$\frac{700}{7} = 100$.

134ste Aufgabe.

Ein Commendant hatte auf einem Posten Husaren, und auf dem andern Infanterie. Zu einer Zeit detaschirte er ein Drittheil und 10 Mann Husaren zur Verstärkung der Infanterie, da blieben so viel Husaren auf dem Posten,

als ein Fünftheil der Infanterie und der detaschirten Husaren zusammen ausmachten; wäre im Gegentheil von der Infanterie die Hälfte und 40 Mann zu den Husaren detaschirt worden, so wären derselben so viel stehen geblieben, als ein Achttheil der Husaren und der detaschirten Infanterie zusammen ausgemacht hätten. Wie viel waren Infanteristen und Husaren?

Durch Raisonnement.

Zur Verstärkung der Infanterie werden von den Husaren ein Drittheil und 10 Mann genommen und der Infanterie zugegeben; folglich bleiben an Husaren $\frac{2}{3}$ weniger 10 Mann zurück, und dieses 5 mal genommen, d. i., $\frac{10}{3}$ Husaren weniger 50 Mann, machen die Anzahl der zusammen genommenen Mannschaft aus, es muß also die Stärke der Infanterie gleich gewesen seyn $\frac{2}{3}$ Husaren weniger 60 Mann; hiervon wird nun, nach dem zweyten Theil der Aufgabe, die Hälfte nebst 40 Mann, d. i., $\frac{2}{6}$ nebst 10 genommen und den Husaren zugegeben; es bleiben also die Anzahl der Infanteristen gleich $\frac{2}{6}$ der Anzahl Husaren weniger 70 Mann, und dieses 8 mal genommen, d. i., $\frac{72}{6}$ weniger 560 ist gleich $\frac{12}{6}$ Husaren nebst 10 Mann, d. h., $\frac{57}{6}$ Husaren ist 570 Mann; folglich $\frac{1}{6}$ Husaren gleich 10 Mann u. s. w.

Algebraische Auflösung.

Die Anzahl der Infanteristen sey x, und der Husaren $= y$.

Demnach ist der ersten Bedingung gemäß:

$$x + \tfrac{1}{3}y + 10 = 5\,(y - \tfrac{2}{3}y - 10) = \frac{10y}{3} - 50$$

daher $\quad 3x + y + 30 = 10y - 150$

und

und $\frac{3x + 30 = 9y - 150}{21x + 210 = 63y - 1050}$ (7

Nach der zweyten Bedingung ist:

$8(x - \frac{1}{2}x - 40) = y + \frac{1}{2}x + 40$
$4x - 320 = y + \frac{1}{2}x + 40$
$\frac{7}{2}x - 320 = y + 40$

(6

$21x - 1920 = 6y + 240$; Es war
$21x + 210 = 63y - 1050$ } die aber von der untern abgezogen,

bleibt $2130 = 57y - 1290$
$3420 = 57y$
folglich $3\frac{2}{57}0 = 60 = y$.

Aus der Gleichung $3x + 30 = 9y - 150$

finden wir $x = \frac{9y - 180}{3} = 3y - 60 = 3$.

$60 - 60 = 2 . 60 = 120$

Probe.

$120 + \frac{1}{3} . 60 + 10 = 5 (60 - \frac{1}{3} 60 - 10)$
$= 150$ 8 $(120 - \frac{1}{2} . 120 - 40) = 60 + \frac{1}{2}$.
$120 + 40 = 160$, wie es verlangt wurde.

135ste Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, die sich verhalten wie a zu b, und wenn von ihnen beyderseits zwey andere Zahlen, die sich wie c : d verhalten, abgezogen worden, sollen sich die Reste wie f : g verhalten, die Summe dieser Reste gleich h seyn.

Auflö-

Auflösung.

Es seyen ax und bx die beyden ersten Zahlen (denn diese verhalten sich offenbar wie a : b), die zwey letzten nenne man cy und dy (denn diese verhalten sich auch wie c : d). Nun soll sich verhalten:

$$ax - cy : bx - dy = f : g,$$

folglich $(a+b)x-(c+d)y : bx-dy = f+g : g.$

Das erste Glied dieser Proportion ist die Summe der Reste, und laut der Aufgabe gleich h, folglich das zweyte Glied $= bx - dy = \frac{gh}{f+g}$ und da auch $h : ax - cy = f+g : f$, so ist auch $ax - cy = \frac{f \cdot h}{f+g}$. Wird nun die erste Gleichung mit c, die zweyte mit d multiplizirt und beyde von einander subtrahirt, so erhalten wir

$$bcx - dcy = \frac{cgh}{f+g}$$

$$\text{und} \quad adx - cdy = \frac{dfh}{f+g}$$

$$x(bc - ad) = \frac{h(cg - df)}{f+g}$$

folglich $x = \frac{h(cg-df)}{(f+g)(bc-ad)}$

Da $bx - dy = \frac{gh}{f+g}$, so ist $y = \frac{bx}{d} - \frac{gh}{d(f+g)} = \frac{b(f+g)x - gh}{d(f+g)}$ in diese Formel den Werth für x gesetzt, giebt:

$$\frac{\frac{b \cdot h \cdot (cg-df)}{bc-ad} - gh}{d(f+g)} = \frac{h(ag-bf)}{(f+g)(bc-ad)}.$$

Es sey: $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$; $d = 7$; $f = 2$; $g = 3$; $h = 20$;

so ist $x = \frac{20 \cdot (6 \cdot 4 - 7 \cdot 2)}{5 (5 \cdot 6 - 4 \cdot 7)} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$, und $y = \frac{20 \cdot (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5)}{4 \cdot 2} = 2 \cdot 2 = 4$.

Die zwey ersten sind also $ax = 4 \cdot 8 = 32$, und $bx = 5 \cdot 8 = 40$, und die zwey andern sind $cy = 6 \cdot 4 = 24$, und $dy = 7 \cdot 4 = 28$;

$ax - cy : bx - dy = : = f : g$

Probe. $32 - 24 : 40 - 28 = 8 : 12 = 2 : 3$

und $8 + 12 = 20 = h$.

136ste Aufgabe.

Man verlangt zwey Zahlen, welche folgende Eigenschaften haben. Die erste nebst der Hälfte der zweyten macht a, und die zweyte nebst $\frac{1}{3}$ der ersten macht auch a.

Durch Raisonnement.

Da die Summe aus der Hälfte der zweyten und aus der ersten Zahl gleich ist der Summe aus beyden Hälften der zweyten Zahl und aus $\frac{1}{3}$ der ersten Zahl, so muß auch die Hälfte der zweyten Zahl nebst $\frac{1}{3}$ der ersten Zahl gleich seyn der ersten Zahl selbst, und die Hälfte der zweyten gleich $\frac{2}{3}$ der ersten Zahl; da nun, der Aufgabe gemäß, $\frac{5}{3}$ der ersten Zahl gleich a ist, so muß die erste Zahl selbst gleich $\frac{3}{5}$ a seyn. Eben so findet sich die zweyte $= \frac{4}{5}$ a.

Algebraische Auflösung.

x sey die erste und y die zweyte Zahl, so ist:

$x + \frac{1}{2} y = a$ oder $2x + y = 2a$; A
und $y + \frac{1}{3} x = a$ oder $6y + 2x = 6a$; B
folglich B - A $= 5y = 4a$, mithin $y = \frac{4}{5} a$
und $x = a - \frac{1}{2} y = a - \frac{2}{5} a = \frac{3}{5} a$.

Es sey $a = 20$, so ist $y = \frac{4}{5} . 20 = 16$
und $x = \frac{3}{5} . 20 = 12$.

137ste Aufgabe.

Jemand wechselt 6 Friedrichsd'or und 2 Dukaten, giebt dafür 40 rthlr. 18 gr. Münze. Zu einer andern Zeit wechselt er wiederum 9 Friedrichsd'or und 5 Dukaten und giebt dafür 67 rthlr 9 gr. Münze. Zu beyden Zeiten stand der Cours der Gelder gegeneinander gleich. Es frägt sich daher: wie hoch hat derselbe den Friedrichsd'or und Dukaten in Münze bezahlen müssen?

Auflösung.

Der Friedrichsd'or habe x und der Dukaten y rthlr. gekostet, so muß $6x + 2y = 40$ rthlr. 18 gr. $= 40\frac{3}{4}$ rthlr. seyn.

Zweytens muß auch $9x + 5y = 67\frac{3}{8}$ rthlr. seyn.

$6x + 2y = 40\frac{3}{4}$ rthlr.
——————————— subtrah.
$3x + 3y = 26\frac{5}{8}$ rthlr.
oder $6x + 6y = 53\frac{1}{4}$
und $6x + 2y = 40\frac{3}{4}$
——————————— subtrahirt.
giebt: $4y = 12\frac{1}{2}$
folglich $y = 3\frac{1}{8}$ rthlr.

Da

Da $6x + 2y = 40\frac{3}{4}$, so $3x + y = 20\frac{3}{8}$, folglich x $\frac{20\frac{3}{8} - y}{3}$ also $x = \frac{20\frac{3}{8} - 3\frac{1}{8}}{3} = \frac{17\frac{2}{8}}{3} = 5\frac{3}{4}$ rthlr.

138ste Aufgabe.

A sagt zu B: vor 7 Jahren war ich gerade dreymal so alt, als du, und in 7 Jahren werde ich gerade doppelt so alt seyn. Wie alt war anjetzo jeder?

Auflösung.

Das gegenwärtige Alter von A sey x, und von B y.

Vor sieben Jahren war also A $x - 7$ Jahre alt und B $y - 7$ Jahre.

laut der Aufgabe muß $x - 7 = 3\ (y - 7)$ seyn.

Nach 7 Jahren ist A $x + 7$ Jahre, und B $y + 7$ Jahre alt.

und dann muß $x + 7 = 2\ (y + 7)$ seyn.

Es war $x - 7 = 3\ (y - 7)$ subtrahirt

bleibt $14 = -y + 35$

oder $y + 14 = 35$

folglich $y = 35 - 14 = 21$ Jahre.

Da $x + 7 = 2\ (y + 7)$, so ist $x = 2y + 7 = 2 \cdot 21 + 7 = 49$ Jahre.

Probe.

Vor 7 Jahren war A $49 - 7 = 42$ Jahre, und B war $21 - 7 = 14$ Jahre, es ist aber wirklich $3 \cdot 14 = 42$. Nach 7 Jahren ist A $49 + 7 = 56$ Jahre, und B $21 + 7 = 28$ Jahre, und es ist wirklich $2 \cdot 28 = 56$.

139ste Aufgabe.

Man soll einen Bruch errathen, von dem folgendes gesagt wird: Wenn man den Zähler um Eins vermehrt, so ist er $= \frac{1}{3}$; vermehrt man aber den Nenner um Eins, so ist er $= \frac{1}{4}$.

Durch Raisonnement.

Wenn man dem Zähler eine Eins hinzulegt, so enthält der Nenner gerade dreymal den Zähler, folglich muß der Nenner vorher den Zähler dreymal nebst 3 enthalten haben; nun vermehrt man den Nenner um Eins, und er enthält viermal den Zähler, folglich muß der Zähler 4, und also der Nenner 15 seyn.

Algebraische Auflösung.

Der gesuchte Bruch sey $\frac{x}{y}$. Die Bedingungen der Aufgabe geben folgende zwey Gleichungen:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3} \text{ und } \frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$$

$$3x + 3 = y; \text{ und } 4x - 1 = y$$
$$\text{mithin } 4x - 1 = 3x + 3$$
$$\text{folglich } x - 1 = 3 \text{ und also } x = 4$$
$$\text{demnach } y = 4 \cdot 4 - 1 = 15.$$

Daher $\frac{x}{y}$ $\frac{4}{15}$, und wirklich ist $\frac{4+1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; und $\frac{4}{15+1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, wie verlangt wurde.

140ste Aufgabe.

Man soll einen Bruch errathen, der folgende Eigenschaft hat: Wenn man Eins vom Zähler abzieht,

abzieht, so ist er $= \frac{1}{4}$, und wird Eins vom Nenner abgezogen, so wird er $= \frac{1}{3}$.

Durch Raisonnement.

Wenn man vom Zähler eine Eins hinwegnimmt, so enthält der Nenner gerade viermal den Zähler, folglich muß der Nenner vorher den Zähler viermal weniger 4 enthalten haben; nun vermindert man den Nenner um Eins, und er enthält dreymal den Zähler, folglich muß der Zähler des Bruchs 5, und also der Nenner des Bruchs 16 seyn.

Algebraische Auflösung.

Der gesuchte Bruch sey $\frac{x}{y}$, so ist laut der Aufgabe

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y-1} = \frac{1}{3}$$

$$4x - 4 = y \quad \text{und} \quad 3x = y - 1$$

$$\begin{array}{r} 3x = y - 1 \\ \hline \end{array}$$ subtrahirt

$x - 4 = 1$ folglich $x = 5$ und $y = 3 \cdot 5 + 1$

$= 16$, also der gesuchte Bruch $= \frac{x}{y} = \frac{5}{16}$.

141ste Aufgabe.

Jemand kauft für 30 gr. Aepfel und Birnen, und erhält 4 Aepfel für 1 gr. und 5 Birnen für 1 gr. Nachher läßt er die Hälfte seiner Aepfel und ein Drittel seiner Birnen an seinen Nachbar für 13 gr. ab, so viel kosteten sie ihm selbst. Wie viel mag er also wohl von jeder Sorte gehabt haben?

Durch Raisonnement.

Da die Hälfte der Aepfel und ein Drittheil der Birnen 13 gr. gekostet haben, so müssen die Hälfte Aepfel und $\frac{2}{3}$ der Birnen 17 gr und also $\frac{1}{3}$ der Birnen 4 gr. kosten; folglich haben die Birnen 12 gr. und die Aepfel 18 gr. gekostet, und es waren demnach 60 Birnen und 72 Aepfel.

Algebraische Auflösung.

Es sey x die Anzahl der Aepfel und y die Anzahl der Birnen.

Da 4 Aepfel einen Groschen kosten, so kostet ein Apfel $\frac{1}{4}$ Groschen, und daher x Aepfel $\frac{x}{4}$ Groschen. Ferner, da 5 Birnen einen Groschen kosten, so werden daher y Birnen $\frac{y}{5}$ Groschen kosten.

Es ist daher $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 30$

oder $5x + 4y = 600$

$\frac{x}{2}$ Aepfel kosten ihm $\frac{x}{2}$ Groschen, und $\frac{y}{3}$ Birnen kosten ihm $\frac{y}{15}$ Groschen.

Daher $\frac{x}{8} + \frac{y}{15} = 13$; oder $15x + 8y = 1560$

da $5x + 4y = 600$, so ist auch $10x + 8y = 1200$

bleibt $5x = 360$

folglich $x = 72$ Aepfel.

Aus $5x + 4y = 600$ folgt $y = 150 - \frac{5}{4}x = 150 - \frac{5}{4} \cdot 72 = 150 - 5 \cdot 18 = 150 - 90 = 60$ Birnen.

142ste Aufgabe.

Man soll zwey Zahlen, x und y finden, die so beschaffen sind, daß, wenn man die eine sowohl, als die andere mit 18 multiplizirt, so

soll

soll das erste Produkt gleich dem Quadrat des andern Produkts seyn; aber wenn man eine jede Zahl mit 3 multiplizirt, so soll das erste Produkt gleich dem Cubus des zweyten Produkts seyn.

Durch Raisonnement.

Nach dem ersten Theil der Aufgabe bestehet das erste Produkt aus zwey gleichen Faktoren, wenn jeder Faktor ein Produkt aus der zweyten Zahl in 18 ist; folglich muß die erste Zahl gleich seyn 18mal dem Quadrat der zweyten Zahl. Nach dem zweyten Theil der Aufgabe entstehet das erste Produkt aus drey gleichen Faktoren, wovon jeder Faktor ein Produkt aus der zweyten Zahl in 3 ist; folglich muß die erste Zahl gleich seyn neunmal dem Cubus der zweyten Zahl, vorher war sie gleich 18mal dem Quadrat der zweyten Zahl; folglich muß der Cubus der zweyten Zahl zweymal größer als ihr Quadrat, d. h., die zweyte Zahl muß 2 und also die erste 72 seyn.

Anmerk. Herr Sachs, der diese Aufgabe in seinem Versuch algebraischer Aufgaben Seite 75. löset, verwechselt in seiner Auflösung das Zweyfache einer Zahl mit deren Quadrat, und das Dreyfache einer Zahl mit deren Cubus; auch ist sonst die mathematische Sprache bey ihm nicht überall richtig.

Algebraische Auflösung.

Von 18y das Quadrat gemacht, giebt $18 \cdot 18y^2$. Es muß nun $18 \cdot 18y^2 = 18x$ seyn.

folglich $18y^2 = x$

Der Cubus von 3y ist gleich $3 \cdot 3 \cdot 3\, y^3 = 3x$

folglich $9y^3 = x$, aber vorhin war $x = 18y^2$

Daher

Daher ist $9y^3 = 18y^2$

oder $9 . y . y . y = 18 . y . y$;

folgl. $y = 2$ und daher $x = 18 . y^2 = 18 . 4 = 72$.

Probe.

$18 . 72 = 18 . 2 \times 18 . 2 = 18 . 2 . 36 = 18 . 72$,

und $3 . 72^2 = 3 . 2 \times 3 . 2 \times 3 . 2 = 3 . 6 . 6 . 2 = 3 . 72^2$.

143ste Aufgabe.

Als eine Gesellschaft ihre Zeche in einem Weinhause bezahlen wollte, findet sie, daß, wenn 3 Personen mehr gewesen wären, so würde jeder 1 gr. weniger bezahlt haben, und wenn zwey Personen weniger gewesen wären, so hätte jede Person 1 gr. mehr geben müssen. Wie viel Personen sind es gewesen, und wie viel hat jede bezahlen müssen?

Auflösung.

Es sey x die Anzahl der Personen und y die Anzahl der Groschen, die jede von ihnen gegenwärtig hat geben müssen, so bezahlen sie zusammen xy Groschen.

Wären 3 mehr, also $x + 3$ Personen gewesen, so hätte ein jeder nur $y - 1$ Groschen bezahlt, also alle $x + 3$ Personen, zusammen $(x + 3)(y - 1) = xy + 3y - x - 3$.

Wären nur $x - 2$ Personen gewesen, so hätte eine jede $y + 1$ Groschen gegeben, und daher alle zusammen $(x - 2)(y + 1) = xy + x - 2y - 2$.

Wir

Wir haben demnach folgende zwey Gleichungen:
$xy = xy + 3y - x - 3$ und $xy = xy + x - 2y - 2$,
oder $0 = 3y - x - 3$ und $0 = x - 2y - 2$.

Beyde Gleichungen addirt, geben:

$0 = y - 5$; folglich $5 = y$
aus $0 = x - 2y - 2$, findet sich $x = 2(y + 1)$
$= 2(5 + 1) = 12$.

144ste Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, deren Summe 2mal, und deren Produkt 12mal ihrer Differenz gleich ist.

Durch Raisonnement.

Da jede Summe zweyer ungleichen Zahlen zweymal die kleinere nebst einmal die Differenz enthält, so muß hier die kleinere gleich der halben Differenz, und folglich gleich $\frac{1}{3}$ der größern seyn; nimmt man nun, nach dem zweyten Theil der Aufgabe, $\frac{1}{3}$ von der größern, so erhält man 12mal $\frac{2}{3}$, d i. 8; es muß also die größere 24 und die kleinere 8 seyn.

Algebraische Auflösung.

Die größte der zu suchenden Zahlen sey x und die kleinste y; ihre Summe ist $x + y$; ihre Differenz $x - y$, und ihr Produkt xy.

Demnach sind hier folgende zwey Gleichungen:

$x + y = 2(x - y)$ und $xy = 12(x - y)$
oder $x + y = 2x - 2y$ und $xy = 12x - 12y$.

Aus der ersten Gleichung folgt $3y = x$.

Die zweyte Gleichung verändere ich so:

12y

$$12y = 12x - xy,$$
$$\text{oder} \quad 12y = (12 - y)\,x.$$

Der ganze Kunstgriff, um nun y zu finden, beruhet darauf, eine Zahl zu finden, womit ich die erste Gleichung multipliziren muß, damit bey der algebraischen Addition oder Subtraktion dieser Gleichungen sich alles, was uns jetzt hindert, die unbekannten Größen zu bestimmen, aufhebt. Ich betrachte daher die zweyte Gleichung genau und finde, daß x in $12 - y$ multiplizirt ist, ich multiplizire daher auch die erste Gleichung mit $12 - y$ und erhalte: $36y - 3y^2 = (12 - y)\,x$; ziehe ich nun diese Gleichung von der zweyten ab, so erhalte ich:

$$3y^2 - 24y = 0 \quad \text{mit } 3y \text{ dividirt}$$

giebt $y - 8 = 0$; folglich $y = 8$

und daher $x = 3y = 3 \cdot 8 = 24$.

Diese Auflösung ist merkwürdig für Anfänger, wir haben bisher noch keine gehabt, die so künstlich gewesen wäre; ich werde daher diese Aufgabe allgemein auflösen.

145ste Aufgabe.

Zwey Zahlen, x, y zu finden, deren Summe a mal, und deren Produkt b mal so groß, als die Differenz ist.

Auflösung.

Es ist $x + y = a\,(x - y) = ax - ay$, also $\frac{(a+1)\,y}{2-1} = x$; ferner ist $xy = b\,(x - y) = bx - by$.

Daher $by = bx - xy$, oder $by = (b - y)\,x$; multiplizieren wir nun die erste Gleichung mit $b - y$, so erhal-

erhalten wir $(by - y^2) \frac{a+1}{a-1} = (b - y)\, x$. Diese Gleichung von der zweyten abgezogen, bleibt

$$y^2 \cdot \frac{a+1}{a-1} + \frac{by\,(a-1) - by\,(a+1)}{a-1} = 0$$

$$y^2 \cdot \frac{a+1}{a-1} - \frac{2\,by}{a-1} = 0$$

mit $\frac{y}{a-1}$ dividirt

giebt $y\,(a+1) - 2b = 0$; folglich $y = \frac{2b}{a+1}$

Da $x = \frac{a+1}{a-1} \cdot y$, so ist $x = \frac{2b}{a-1}$

Es erfordert einige Uebung, wenn man durch geschickte Multiplikation sich die Auflösung der Gleichungen erleichtern will, sonst ist auch hier die Auflösung leicht, wenn man in der Gleichung $by = (b - y)\, x$, den in die erste Gleichung für x gefundenen Werth setzt; es war nämlich $x = \frac{a+1}{a-1}\, y$,

also $by = (b - y) \cdot \frac{a+1}{a-1} \cdot y$

mit $\frac{y}{a-1}$ dividirt

giebt $ab - b = (b - y)(a + 1) = ab + b - (a + 1)\, y$ und hieraus findet sich y, wie vorhin.

Die für x und y gefundenen Formeln lassen sich bequem in folgenden Worten ausdrücken.

Man findet die gesuchte Zahl, wenn man die doppelte Zahl, die da anzeigt, wie vielmal das Produkt der Zahlen größer, als ihre Differenz ist, mit der um Eins vermehrten und verminderten Zahl, die da anzeigt, wie vielmal die Summe größer, als die Differenz der

Zahlen ist, dividirt. Die erste Division giebt die kleinste, die zweyte Division giebt die größte Zahl.

In der 108ten Aufgabe ist $a = 2$ und $b = 12$, also $x = \frac{2}{2} \cdot \frac{12}{1} = 24$ und $y = \frac{2}{2} \cdot \frac{12}{1} = 8$ wie vorhin.

Sollen x und y nur positiv gelten, so muß man sich hüten, a nicht kleiner als Eins zu nehmen, weil sonst $x = \frac{2b}{a-1}$ negativ würde; aber man darf auch a nicht gleich 1 setzen, das heißt, die Summe der Zahlen kann der Differenz dieser Zahlen nicht gleichgesetzt werden, denn alsdann würde $x = \frac{2b}{0} = \infty$, das heißt, größer als jede angebliche Zahl. Siehe den ersten Theil dieser Sammlung, Seite 302 und 306.

146ste Aufgabe.

Man verlangt zwey Zahlen, deren Differenz sich zur Summe dieser Zahlen verhält wie a : b, und die Summe zum Produkt wie c : d.

Auflösung.

Die größte der gesuchten Zahlen sey x, die kleinste y, so ist

1) $x - y : x + y = a : b$, also $x + y = \frac{b}{a}(x - y)$

und 2) $x + y : xy = c : d$

---

mithin $x - y : xy = ac : bd$, also $xy = \frac{bd}{ac}(x - y)$.

Vergleichen wir dieses mit der vorhergehenden Aufgabe, so ist das a und b in der vorhergehenden Aufgabe, hier $\frac{b}{a}$ und $\frac{bd}{ac}$, setzen wir also diese Werthe für a und b

in

in die Formeln der vorhergehenden Aufgabe, so erhalten wir:

$$x = \frac{2 \cdot \frac{bd}{ac}}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{2bd}{c \cdot (b - a)}; \text{ und}$$

$$y = \frac{2bd}{c\,(b + a)}. \quad \text{Es sey } a = 2;\ b = 3;$$

$c = 3$ und $d = 5$, so ist $x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3\,(3 - 2)} = 10$, und

$$y = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3\,(3 + 2)} = 2.$$

147ste Aufgabe.

Es wird eine zweyzifferige Zahl des decadischen Systems verlangt die der vierfachen Summe ihrer Ziffern gleicht, und wenn man sie zu der zweyzifferigen Zahl 18 addirt, so soll sie einer Zahl gleich seyn, die herauskommt wenn man die Ziffern in der gesuchten die Stellen verwechseln läßt.

Durch Raisonnement.

Aus dem zweyten Theil der Aufgabe ergiebt sich sogleich, daß die Zahl mehr Einer als Zehner enthalte; da nun die Zahl durch die Verwechselung ihrer Ziffern für jeden Einer, den sie mehr enthält als Zehner, einen Einer verliert und einen Zehner gewinnt, so gewinnt sie so viel Mal 9, wie Einer mehr sind, als Zehner; hier wird durch die Verwechselung 18 gewonnen, folglich enthält die gesuchte Zahl zwey Einer mehr als Zehner, und bestehet also aus 11mal der kleinern Ziffer nebst 2, welches nun, nach dem ersten Theil der Aufgabe,

gleich ist viermal der Summe, d. h. achtmal der kleinern Ziffer nebst 8; folglich ist dreymal die kleinere Ziffer nebst 2 gleich 8, und also die kleinere Ziffer, oder die Zehner der Zahl gleich 2 und die Einer gleich 4.

Algebraische Auflösung.

Diejenige Ziffer, welche in der Stelle der Zehner steht, sey x, und die in der Stelle der Einer sey y, so wird die gesuchte Zahl folgendermaßen ausgedrückt: $10x + y$ und diese Zahl muß gleich $4(x + y)$ seyn.

$$\text{Also } 10x + y = 4x + 4y$$
$$6x = 3y, \text{ folglich } y = 2x$$

Wenn in der gesuchten Zahl $10x + y$, die Ziffern x, y ihre Stellen verwechseln, so bekommen wir folgende Zahl $10y + x$. Nun soll der zweyten Bedingung der Aufgabe gemäß $10x + y + 18 = 10y + x$ seyn.

$$9x + 18 = 9y$$

mithin $x + 2 = y$, daher $2x = x + 2$, folglich $x = 2$, demnach $y = 2x = 4$, folglich die gesuchte Zahl $= 24$.

148ste Aufgabe.

Es soll eine dreyzifferige Zahl im decadischen System gefunden werden, deren Ziffern um gleich viel wachsen. Diese Zahl durch die Summe ihrer Ziffern dividirt, soll zum Quotient 48 geben; aber wenn man von der gesuchten Zahl 198 abzieht, so soll eine Zahl herauskommen, die derjenigen gleich ist, welche entstehen würde, wenn die Ziffern in der gesuchten Zahl ihre Stellen verwechselten.

Durch Raisonnement.

Es ist einleuchtend, daß durch die Verwechselung der Ziffern erstlich nur die Einer und Hunderte ihre Stelle verändern, nicht aber die Zehner; und zweytens, daß für jeden Hunderter, den die gesuchte Zahl mehr enthält, als Einer, sie ein Hunderter verliert und ein Einer gewinnt, d. h. sie verliert so oft 90 als Hunderter mehr sind wie Einer; hier wird nun durch die Verwechselung 198 verloren, folglich enthält die gesuchte Zahl zwey Hunderter mehr, als Einer; da nun die Zehner 10mal die Einer, oder 10mal die kleinste Ziffer nebst einem Zehner enthalten, und ferner die Hunderte 100mal die kleinste Ziffer nebst zwey Hunderter enthalten, so muß die gesuchte Zahl 111mal die kleinste nebst 210 enthalten, und dieses soll, nach dem ersten Theil der Aufgabe, gleich seyn 48mal der Summe, d. i., — weil jede Summe dreyer ungleichen Ziffern, deren Differenz 1 ist, dreymal die kleinste nebst 3 enthält, also gleich 144mal der kleinsten nebst 144, d. h. 33mal der kleinsten Ziffer ist gleich 66, folglich muß die kleinste Ziffer 2, und also die gesuchte Zahl 432 seyn.

Algebraische Auflösung.

Die Ziffer in der Stelle der Hunderte sey x, und die Ziffer in der Stelle der Zehner sey y, so ist diese um $y - x$ größer, als x; da nun, laut der Aufgabe, die dritte Ziffer, welche in der Stelle der Einer steht, um eben so viel größer seyn muß, als die zweyte, so drückt man sie so aus: $2y - x$; diese gesuchte Zahl selbst ist daher $100x + 10y + 2y - x = 99x + 12y$.

Der ersten Bedingung gemäß ist:

$$\frac{99x + 12y}{x + y + 2y - x} = \frac{99x + 12y}{3y} = \frac{33x + 4y}{y} = 48$$

oder

oder $33x + 4y = 48y$; oder $33x = 44y$; oder $3x = 4y$, mithin $\frac{3}{4}x = y$.

Verwechseln die Ziffern ihre Stellen, so werden die Einer $2y - x$, Hunderte, die Hunderte x aber werden Einer, die Zehner y behalten ihre Stelle, demnach entstehet folgende Zahl: $200y - 100x + 10y + x = 210y - 99x$.

Laut der zweyten Bedingung ist:

$210y - 99x = 99x + 12y - 198$

$12y$ subtrahirt.

$198y - 99x = 99x - 198$

$99x$ addirt.

$198y = 198x - 198$

mit 198 dividirt.

folglich $y = x - 1$

Vorhin fanden wir $y = \frac{3}{4}x$, daher $\frac{3}{4}x = x - 1$, oder $1 + \frac{3}{4}x = x$, oder $1 = \frac{1}{4}x$,

folglich $x = 4$

Daher $y = x - 1 = 4 - 1 = 3$; und die dritte $2y - x = 2 \cdot 3 - 4 = 2$. Demnach die gesuchte Zahl = 432.

In der Auflösung nahm ich an, daß die Ziffern von der höchsten bis zur niedrigsten wachsen; allein das Resultat zeigt uns, daß sie nicht wachsen, sondern um gleichviel abnehmen; allein jene Voraussetzung widerspricht diesem Resultat keinesweges, und die Sache verhält sich so: wenn man in der Algebra sagt, die Größe y sey um $y - x$ größer, als x, so nimmt man solches in dem allgemeinsten Sinne, so daß, wenn x auch größer als y seyn sollte, man doch sagen kann, daß y um $y - x$ größer, als x ist, denn wenn ich zu x, $y - x$ addire, so erhalte ich wiederum y; freylich ist, wenn $x >$ als y, $y - x$ negativ, und wenn ich daher die Ziffer in der Stelle der Einer durch $y + (y - x)$

$(y - x) = 2y - x$ ausdrückte, so ist, wenn $y - x$ negativ, auch $y + (y - x) = 2y - x < y$, und zwar ist $2y - x$, um $y = x$ kleiner als y, und so verhält es sich immer bey allen ähnlichen Fällen.

149ste Aufgabe.

A und B haben eine gewisse Anzahl Zahlpfennige. A giebt dem B so viel, als B bereits hat; nun giebt B wieder so viel dem A zurück, als A behalten hat; nun giebt A wieder so viel dem B, als B behalten hat, und so fort; nach vier solchen wechselseitigen Geschenken hat ein jeder gerade 16 Zahlpfennige. Wie viel hat ein jeder anfangs gehabt?

Durch Raisonnement.

Zum vierten Male, nachdem B dem A so viel giebt, als A übrig behalten, hat jeder 16, folglich muß B 24 und A 8 gehabt haben; zum dritten Mal, nachdem A dem B so viel giebt, als B übrig behalten, hat A 8 und B 24; folglich muß A 20 und B 12 gehabt haben: zum zweyten Mal, nachdem B dem A so viel giebt, als A übrig behalten, hat B 12 und A 20, folglich muß B 22 und A 10 gehabt haben: zum ersten Mal endlich, nachdem A dem B so viel giebt, als B bereits hat, hat A 10 und B 22; folglich muß A anfangs 21 und B 11 gehabt haben.

Algebraische Auflösung.

A habe x und B y Zahlpfennige gehabt. Wenn A y weggiebt, so bleiben ihm $x - y$.

B hat

B hat nun 2y. Nun giebt B an A $x - y$; B behält also $3y - x$.

A hat nun $2x - 2y$, giebt aber nun wieder an B $3y - x$, behält also nur $3x - 5y$.

B hat nun $6y - 2x$, giebt aber nun wieder an A $3x - 5y$, behält also $11y - 5x$.

A hat nun $6x - 10y$.

Laut den Bedingungen der Aufgabe soll $11y - 5x = 16$ und $6x - 10y = 16$ seyn.

Beyde Gleichungen addirt, geben $y + x = 32$, folglich $y = 32 - x$, diesen Werth für y in die Gleichung $6x - 10y = 16$, oder $3x - 5y = 8$ gesetzt, giebt $3x - 160 + 5x = 8$, oder $8x = 168$, folglich $x = 21$, und daher $y = 32 - 21 = 11$.

Probe.

A hat 21, giebt an B, der 11 hat, 11 Stück, behält also $21 - 11 = 10$.

B hat nun 22, giebt aber jetzt an A 10, behält also $22 - 10 = 12$.

A hat nun wieder 20, giebt davon an B 12, behält also $- 12 = 8$.

B hat nun 24, giebt an A 8, behält also $24 - 8 = 16$,

und A hat nun auch 16, wie es die Aufgabe verlangte.

Hätte man die Gleichungen nicht gleich 16, sondern allgemein gleich n gesetzt. Z. B. $11y - 5x = n$; und $6x - 10y = n$, so würden wir hieraus $y = \frac{1}{16} . n$ und $x = \frac{21}{16} n$ finden. Diese für x und y gefundenen Formeln lassen uns leicht übersehen, was man statt $n =$ für ganze Zahlen nehmen muß, um für x und y ganze Zahlen zu haben; nämlich hier muß n entweder

16 selbst, oder jedes Vielfache von 16 seyn, als: 32, 48, 64 u. s. w.; denn nur in diesen Zahlen gehet 16 auf. Zugleich wird man sehen, daß 16 die kleinste Zahl ist, die man für n setzen darf.

Diese und einige der nächst vorhergehenden Aufgaben habe ich aus dem ersten Theile von Saunderson's Elemens d'Algebre, traduit de l'anglois en francois par Mr. de Joncourt. 2 Tomes in 4to. Amsterdam et Leipzig, entlehnt. Saundersons Auflösungen sind von den Meinigen verschieden. Von dieser schätzbaren Algebra habe ich schon 1798. eine deutsche Uebersetzung mit Anmerkungen und Zusätzen bey dem Verleger gegenwärtiger Aufgaben herausgegeben. Diese Algebra empfiehlt sich ganz besonders zum Selbstunterricht und enthält im 2ten und 3ten Theile sehr viele lehrreiche geometrische Aufgaben.

In den folgenden Aufgaben sollen nun die verschiedenen Auflösungsmethoden für zwey unbekannte Grössen als weitere Ausführung von dem, was man davon in der Einleitung gesagt hat, mitgetheilt werden.

150ste Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, deren Summe oder Differenz a und die Summe oder Differenz p ihrer Produkte durch gegebene Zahlen m und n bekannt ist.

Benennung. Die gesuchten Zahlen seyen x und y

1°. Es seyen a und p zwey Summen.

Bedingung. $\begin{cases} x + y = a \\ mx + ny = p \end{cases}$

Die

Die Coeffizienten von x und y sind in beyden Gleichungen verschieden; multiplizirt man aber die erste Gleichung durch den Coëffizient von einer der unbekannten Größen in der zweyten Gleichung, so werden dadurch die Coëffizienten dieser unbekannten Größe in beyden Gleichungen gleich; und daher, wenn man die Unterschiede der Glieder der so veränderten ersten Gleichung, und der korrespondirenden der zweyten sucht, so bringt man dadurch diese unbekannte weg, und man erhält eine Gleichung, die nur noch die zweyte unbekannte enthält.

Man erhält also:

$$\begin{array}{r} mx + my = ma \\ mx + ny = p \\ \hline \end{array}$$

$$\text{oder } \begin{array}{l} (m - n)\ y = ma - p \\ (n - m)\ y = p - ma \end{array} \text{ je nachdem } m \gtrless n \text{ ist.}$$

Eben so, wenn man die Glieder der ersten Gleichung durch n multiplizirt, so macht man in beyden Gleichungen die Coëffizienten von y gleich:

$$\begin{array}{r} nx + ny = na \\ mx + ny = p \\ \hline \end{array}$$

$$\text{oder } \begin{array}{l} (m - n) \cdot x = p - na \\ (n - m)\ \ x = na - p \end{array} \text{ je nachdem } m \gtrless n \text{ ist,}$$

$$\text{folglich } x = \frac{p - na}{m - n} = \frac{na - p}{n - m}$$

$$\text{und } y = \frac{ma - p}{m - n} = \frac{p - ma}{n - m}$$

daraus

$$x + y = \frac{p - na}{m - n} + \frac{ma - p}{m - n} = \frac{a \cdot (m - n)}{m - n} = a$$

$$mx + ny = \frac{mp - mna}{m - n} + \frac{mna - np}{m - n} = \frac{p\,(m - n)}{m - n} = p.$$

2°. Es sey a eine Summe und p eine Differenz.

Bedingung. $\begin{cases} x + y = a \\ mx - ny = p \end{cases}$

Nachdem man die Coëffizienten von x und y gleich gemacht hat, so muß man, da die Zeichen von y in beyden Gleichungen verschieden sind, beyde addiren um x zu erhalten und y wegzuschaffen.

Man erhält:

$mx + my = ma$	$nx + ny = na$
$mx - ny = p$	$mx - ny = p$
$(m+n)\ y = ma - p$	$(m+n)\ x = na + p$
$y = \frac{ma - p}{m+n}$	$x = \frac{na + p}{m+n}$

Daraus

$$x+y = \frac{na+p}{m+n} + \frac{ma-p}{m+n} = \frac{a(a+n)}{m+n} = a.$$

$$mx - ny = \frac{mna+mp}{m+n} - \frac{mna-np}{m+n} = p\,\frac{(m+n)}{m+n} = p.$$

3°. Es sey a eine Differenz und p eine Summe.

Beding. $\begin{cases} x - y = a \\ mx + ny = p \end{cases}$

Das Verfahren ist dasselbe als für 2°.

Man erhält:

$mx - my = ma$	$nx - ny = na$
$mx + ny = p$	$mx + ny = p$
$(m+n)\ y = p - ma$	$(m+n)\ x = p + na$
$y = \frac{p - ma}{m+n}$	$x = \frac{p + na}{m+n}$

4°.

4°. Es seyen a und p zwey Differenzen. Man erhält die beyden Fälle:

Erster Fall.	Zweyter Fall.
$x - y = a$	$x - y = a$
$mx - ny = p$	$-mx + ny = p$

Da im ersten Fall die Zeichen jeder der unbekannten Größen in beyden Gleichungen dieselben sind, so erhält man jede der unbekannten durch Subtraktion, nachdem man vorher die Coëffizienten von derjenigen, die man wegschaffen will, gleich gemacht hat.

Da im zweyten Fall die Zeichen jeder der unbekannten in beyden Gleichungen verschieden sind, so erhält man jede durch Addition. Man hat also:

Erster Fall.	$mx - my = ma$ $mx - ny = p$	$nx - ny = na$ $mx - ny = p$
	$(m-n)y = p-ma$	$(m-n)x = p-na$
oder	$(n-m)y = ma-p$	oder $(n-m)x = na-p$
	$y = \frac{ma-p}{n-m}$	$x = \frac{na-p}{n-m}$
Zweyter Fall.	$mx - my = ma$ $-mx + ny = p$	$nx - ny = na$ $-mx + ny = p$
	$(n-m)y = p+ma$	$(n-m)x = p+na.$
	$y = \frac{ma+p}{n-m}$	$x = \frac{na+p}{n-m}$

1. Anmerk. Da die beyden Gleichungen des 1sten und 2ten Falls $\left\{\begin{array}{l} mx - ny = p \\ -mx + ny = p \end{array}\right\}$, nur in Zeichen in ihrer ersten Hälfte verschieden sind, so daß die Gleichung des zweyten Falls sich unter der Form $mx -$ $ny =$

$ny = -p$ darstellen läßt, so sind die Werthe von x und von y aus dem zweyten Falle von denen des ersten Falls nur durch das Zeichen von p verschieden.

In den so eben entwickelten Beyspielen sind, wenigstens in einer der Gleichungen, die Coëffizienten der unbekannten gleich 1; woraus folgt, daß man die Coëffizienten von einer der unbekannten in beyden Gleichungen gleich macht, indem man beyde Seiten dieser Gleichung durch den Coëffizienten in der andern Gleichung von der unbekannten, die man wegschaffen will, multiplizirt. Dieser besondere Fall kann, wegen seiner Einfachheit, als Einleitung zur Entwickelung des allgemeinen Falls dienen.

Es seyen also zwey Gleichungen, beyde mit zwey unbekannten Größen, und in welchen die Coëffizienten von einerley unbekannten ungleich sind. Um diese Coëffizienten gleich zu machen, so multiplizire man die Seiten einer jeden Gleichung durch den Coëffizienten in der andern Gleichung von der unbekannten, die man wegschaffen will. Die Coëffizienten von dieser unbekannten in beyden Gleichungen werden gleich werden, und man wird diese unbekannte durch Subtraktion oder Addition der korrespondirenden Seiten beyder Gleichungen wegschaffen.

Um die Uebersetzung der Formeln, die man erhalten würde, zu erleichtern, so seyen durch a und a' die Coëffizienten der einen von den unbekannten in beyden Gleichungen, und durch b und b' die Coëffizienten der andern unbekannten bezeichnet; seyen c und c' die zweyten Hälften dieser Gleichungen.

$$\text{Bedingg.} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Um x wegzubringen, so multiplizire man die Glieder der ersten Gleichung mit a' und die der zweyten Gleichung durch a.

Um

Um y wegzuschaffen, multiplizire man beyde Seiten der ersten und zweyten Gleichung, respektive durch b′ und b.

$$\text{Red.} \begin{cases} aa'x + a'by = a'c \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases}$$

$$y\,(ab' - a'b) = ac' - a'c.$$

$$\begin{aligned} ab'x + bb'y &= b'c \\ a'bx + bb'y &= bc' \end{aligned}$$

$$x\,(ab' - a'b) = b'c - bc'$$

Auflösung.

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

$$ax = \frac{ab'c - abc'}{ab' - a'b}$$

$$ax + by = c \cdot \frac{ab' - a'b}{ab' - a'b} = c$$

$$by = \frac{abc' - a'bc}{ab' - a'b}$$

$$a'x = \frac{a'b'c - a'bc'}{ab' - a'b}$$

$$a'x + b'y = c' \cdot \frac{ab' - a'b}{ab' - a'b} = c'$$

$$b'y = \frac{ab'c - a'b'c}{ab' - a'b}$$

2. Anmerk. Die Aufgabe ist unbestimmt, wenn zugleich $ab' = a'b$; und $ac' = a'c$ oder $bc' = b'c$ ist;

denn, es sey $ab' = a'b$; oder $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; wenn $a' = ma$, $b' = mb$; so hat man

$$ax + by = c$$
$$max + mby = c';$$

und weil die erste Hälfte der zweyten Gleichung, das mfache von der ersten Hälfte der ersten Gleichung ist, so muß auch die zweyte Hälfte der zweyten Gleichung m mal so groß, als die zweyte Hälfte der ersten Gleichung seyn; es muß also seyn

$$c' = mc; \text{ aber } m = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}; \text{ folglich}$$

$$c' = \frac{a'}{a}c = \frac{b'}{b}c; \text{ oder } \left\{\begin{matrix} ac' = a'c \\ bc' = b'c \end{matrix}\right\}$$

3. Anmerk. Obgleich die erste Hälfte der vorhergehenden Gleichungen als Summen ihrer Glieder betrachtet worden sind, so enthalten doch die gefundenen Formeln die Werthe der unbekannten, wenn eine von den ersten Hälften oder beyde der Unterschied ihrer Glieder wäre; dazu bedarf es in den Formeln nur die Aenderung der Zeichen von denjenigen Gliedern, deren Zeichen in den Gleichungen sich verändert haben.

Es seyen die Gleichungen:	So hat man
$ax - by = c$ $a'x + b'y = c'$	$x = \frac{b'c + bc'}{ab' + ab'}$; $y = \frac{ac' - a'c}{ab' + a'b}$;
$ax - by = c$ $a'x - b'y = c'$	$x = \frac{-b'c + bc'}{-ab' + a'b}$; $y = \frac{ac' - a'c}{ab' + a'b}$;
$ax - by = c$ $-a'x + b'y = c'$	$x = \frac{b'c + bc'}{ab' - a'b}$; $y = \frac{ac' + a'c}{ab' - a'b}$.

4. Anmerk. Die Formeln:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

können, um sie dem Gedächtniß einzuprägen, in Worten so ausgedrückt werden:

Jede

Jede unbekannte ist durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Nenner der Unterschied von den aus den Coëffizienten der beyden unbekannten übers Kreuz gemachten Produkten ist. Der Zähler wird aus dem Nenner geschaffen, wenn man in derselben Gleichung die zweyte Hälfte der Gleichungen statt des Coëffizienten der gesuchten unbekannten setzt.

Diese Regel unmittelbar auf die Formeln des ersten Falls

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

anwendbar, muß, in Ansehung der Zeichen, von den Gliedern des Zählers mit Behutsamkeit auf die andern Fälle angewendet werden. Die Zeichenänderungen der Glieder des Zählers hängt ganz allein von den Zeichenänderungen der Coëffizienten der unbekannten ab.

5. Anmerk. Diese hier entwickelte Methode, Gleichungen mit zwey unbekannten Größen aufzulösen, kann man die Additions- und Subtraktions-Methode nennen, sie scheint mir die bequemste. Inzwischen giebt es auch noch andere, nach der Verschiedenheit der Fälle mehr oder weniger bequem.

Zweyte Methode.

In beyden Gleichungen suche man eine und dieselbe unbekannte durch die bekannten und die andere unbekannte auszudrücken; die Gleichheit dieser Werthe giebt eine zweyte Gleichung, worin nur noch die zweyte unbekannte Größe enthalten ist.

Es seyen $ax + bx = c$, $dx + b'x = c'$ also $x = \frac{c - by}{a}$, $x = \frac{c' - b'y}{a'}$

daraus

daraus $\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}$

$$a'c - a'by = ac' - ab'y;$$

folglich $$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

und $$ax = c - by = \frac{ab'c - abc'}{ab' - a'b};$$

folgl. $$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

Dieses Verfahren kann man die Vergleichungsmethode nennen. Die Brüche dabey zu vermeiden, mache man die Coëffizienten der abgesonderten dargestellten unbekannten Größe gleich, wie bey der ersten Methode.

Z. B. $\begin{cases} 9x + 7y = 89 \\ 6x + 11y = 91 \end{cases}$ hieraus $\begin{cases} 9x = 89 - 7y \\ 6x = 91 - 11y \end{cases}$

daraus $\begin{cases} 18x = 178 - 14y \\ 18x = 273 - 33y \end{cases}$

demnach $178 - 14y = 273 - 33y;$

woraus $y = 5$ folgt,

und $$x = \frac{89 - 7y}{9} = 6.$$

Dritte Methode.

Man suche in einer von den beyden Gleichungen eine von den zwey unbekannten Größen auf eine Seite allein zu erhalten; den dafür gefundenen Werth setze man in der andern Gleichung: so hat man nur noch eine Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe.

Es seyen $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + b'y = c' \end{cases}$ also $x = \frac{c - by}{a};$

$$dx = \frac{a'c - a'by}{a}; \quad dx + b'y = \frac{a'c - a'by + ab'y}{a} = c'$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}, \text{ wie vorher.}$$

Dieses Verfahren kann man Substitutions-Methode nennen. Sie läßt sich besonders in denjenigen Fällen mit Vortheil gebrauchen, wo sie auf keine Brüche führt.

151ste Aufgabe.

Jemand besitzt ein gewisses Kapital, welches er zu gewissen Prozenten benutzt. Ein anderer, der 10000 rthlr. mehr hat, und sein Kapital um 1 Prozent höher benutzt, hat dadurch 800 rthlr. mehr Einkünfte. Ein dritter, der 1500 rthlr. mehr als der erste hat, und 2 Prozent mehr einnimmt, hat 1500 rthlr. mehr als der erste einzunehmen. Wie groß ist das Vermögen von einem Jeden gewesen, und zu wie viel Prozenten haben sie ihre Kapitalien benutzt?

Auflösung.

Der erste habe gehabt ein Kapital x und solches

benutzt	=	=	ay Proz.
Der zweyte	$x + 10000$	benutzt	$a(y+1)$ Proz.
Der dritte	$x + 15000$	— =	$a(y+2)$ —

Die Einnahme des ersten beträgt also $\frac{y}{100} \cdot x$

Die des zweyten = = $\frac{y+1}{100} \cdot (x + 10000)$

Die des dritten = = $\frac{y+2}{100} \cdot (x + 15000)$

Die

Die Bedingungen der Aufgabe geben nun folgende zwey Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{y}{100} \cdot x + 800 = \frac{y+1}{100} \cdot (x + 10000)$$

$$\text{II.} \quad \frac{y}{100} \cdot x + 1500 = \frac{y+2}{100} (x + 15000)$$

daraus folgt $y = 4$ Prozent.
und $x = 30000$ rthlr.

152ste Aufgabe.

Jemand kauft eine gewisse Anzahl Ellen Leinewand zu einem gewissen Preise. Wären von einer Leinewand, von welcher die Elle 3 gr. weniger gekostet hätte, 5 Ellen mehr gekauft worden, so hätte er nicht mehr ausgegeben; wollte er aber von einer Leinewand, von welcher die Elle 4 gr. weniger kostet, 6 Ellen mehr kaufen, so würde die ganze Ausgabe sogar 18 gr. weniger betragen haben. Wie viel Ellen und zu welchem Preise hat er sie gekauft?

Auflösung.

30 Ellen à 21 gr.

153ste Aufgabe.

Von einer gewissen Anzahl Leinweber machen täglich jeder eine gewisse Anzahl Ellen Leinwand. Würden 6 Arbeiter mehr angestellt, und machte jeder täglich eine Elle mehr, so würden täglich 78 Ellen mehr fertig. Aber zwey Arbeiter

weniger, als die erste Zahl, von welchen jeder täglich eine Elle weniger machte, würden täglich 50 Ellen weniger liefern. Wie viel Arbeiter sind es gewesen, und wie viel hat jeder täglich Ellen gewebt?

Auflösung.

42 Arbeiter, und jeder hat täglich 5 Ellen gewebt.

154ste Aufgabe.

Es wird ein Werk unter einem gewissen Format gedruckt; setzt man auf jede Seite 3 Zeilen und in jede Zeile 4 Buchstaben mehr, so würde jede Seite 228 Buchstaben mehr erfordern; setzt man aber auf jede Seite 2 Zeilen und in jede Zeile 3 Buchstaben weniger, so würde jede Seite 147 Buchstaben weniger haben. Wie viel Zeilen hat jede Seite und wie viel Buchstaben jede Zeile gehabt?

Auflösung.

Jede Seite 27 Zeilen und jede Zeile 36 Buchstaben.

155ste Aufgabe.

Die Dimensionen eines Recktangels sind unbekannt. Man weiß aber, daß, wenn dessen Seiten (durch Addition oder Subtraktion) um a und b verändert werden, dessen Flächenraum um p sich verändert. Aendert

man

man aber dieselben Seiten um a′ und b′, so verändert sich die Fläche um p′. Welches sind die Dimensionen dieses Recktangels?

Auflösung.

Benennung.

1. Reckt.	2. Reckt.	3. Recktangel.
Länge.		
x	$x + a$	$x + a'$
Breite.		
y	$y + b$	$y + b'$
Flächeninhalt.		
xy	$xy + ay + bx + ab$	$xy + a'y + b'x + a'b$
Vergrößerung.		
	$ay + bx + ab$	$a'y + b'x + a'b'$

Bedingung. $\begin{cases} ay + bx + ab = p \\ a'y + b'x + a'b' = p' \end{cases}$

Red. $\begin{cases} aa'y + a'bx + aa'b = pa' \mid ab'y + bb'x + abb' = pb' \\ aa'y + ab'x + aa'b' = p'a \mid a'by + bb'x + a'bb' = p'b \end{cases}$

$$\text{folgl. } x = \frac{a\,(a'b' - p') - a'\,(ab - p)}{a'b - ab'}$$

$$\text{und } y = \frac{b\,(a'b' - p') - b'\,(ab - p)}{a'b - ab'}$$

Erster Fall. Es sey $a'b = ab'$, so muß auch $a'\,(p - ab) = a\,(p' - a'b')$, oder $\frac{p - ab}{a} = \frac{p' - a'b'}{a'}$ seyn.

Weil aber $a'b = ab'$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$;

und

und $\frac{p - ab}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{p' - a'b'}{a'} \cdot \frac{a'}{b'}$, oder $\frac{p - ab}{b} = \frac{p' - a'b'}{b'}$; und $b'(p - ab) = b(p' - a'b')$.

Ist also, unter der Voraussetzung $a'b = ab'$, nicht zugleich $\frac{p - ab}{a} = \frac{p' - a'b'}{a'}$, folglich $\frac{p - ab}{b} = \frac{p' - a'b'}{b'}$; so ist die Aufgabe unmöglich. Hingegen wird sie unbestimmt, wenn eine der zwey letzten Gleichungen mit der ersten $a'b = ab'$, oder $\frac{a}{a} = \frac{b}{b'}$ zugleich statt hat.

Wäre nämlich bloß $a'b = ab'$, so hätten wir $x = \frac{a'(p - ab) - a(p' - a'b)}{o}$; $y = \frac{b(a'b' - p') - b'(ab - p)}{o}$ welches Unmöglichkeit anzeigt; ist aber auch zugleich $a'(p - ab) = a(p' - ab)$, so wäre $x = \frac{o}{o}$ und $y = \frac{o}{o}$ also unbestimmt.

Ist $a'b > ab'$, und zugleich $\begin{cases} a'(p - ab) > a(p' - a'b') \\ b(p' - a'b') > b'(p - ab) \end{cases}$ so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinne ihrer Aussage aufgelöst.

Ist aber $\begin{cases} a'(p - ab) < a(p' - a'b') \\ b(p' - a'b') < b'(p - ab) \end{cases}$; so müssen die Seiten des ersten Rectangels von den gegebenen Größen a, b, a', b' abgezogen werden, um die Seiten der andern Rectangeln zu bekommen. Und hat man $\begin{cases} a'(p - ab) > a(p' - a'b') \\ b(p' - a'b') < b(p - ab) \end{cases}$, so muß man die Breite

des

des ersten Recktangels von den gegebenen Größen b und b′ abziehen, um die beyden andern Recktangeln zu erhalten.

Diese Formeln sind auch auf die Fälle anwendbar, in welchen eine oder mehrere der gegebenen Größen a, b, a′, b′ ihr Zeichen ändern, oder, statt zu den Seiten des ersten Recktangels addirt, von denselben abgezogen werden müssen. Und so lösen die vorhergehenden Formeln 16 Aufgaben auf, welche sich durch die Verschiedenheit der Zeichen jener 4 Größen unterscheiden; je nachdem nämlich alle viere additiv, drey additiv und eine subtraktiv, zwey additiv und zwey subtraktiv, eine additiv und drey subtraktiv, oder endlich alle vier subtraktiv sind.

Beyspiel.

Die vier Größen a, b, a′, b′ seyen subtraktiv: so wird

$$x = \frac{-a'(p-ab)+a(p'-a'b')}{a'b-ab'} = \frac{a'(ab-p)-a(a'b'-p')}{a'b-ab'}.$$

In diesem Fall müssen aber die Größen p und p′ ebenfalls subtraktiv werden. Man hat also:

$$x = \frac{a'(ab+p)-a(a'b'+p')}{a'b-ab'}$$

156ste Aufgabe.

Die Dimensionen von einem Parallelopipedum, dessen Grundfläche ein Quadrat, sind unbekannt. Man weiß aber, daß, wenn man die Seiten seiner Grundfläche um a, seine Höhe um b verändert, dadurch der Inhalt seiner ganzen

ganzen Oberfläche sich um p verändert. Werden jene Seiten um $a' = b'$ verändert, so wird die Oberfläche um p' sich verändern. Welches sind die Dimensionen?

157ste Aufgabe.

Drey Personen, A, B, C, spielen mit einander zu drey verschiedenen Malen. Das erste Mal verdoppeln B und C ihr Geld auf Kosten von A; das zweyte Mal verdreifachen A und C ihr Geld auf Kosten von B; und das dritte Mal vervierfachen A und B ihr Geld auf Kosten von C. Und nun hat jeder von ihnen die Summe a. Wie viel hatte jede Person anfänglich und nach jedem Spiel?

Algebraische Benennung.

Geld der Person	A;		der Pers. B;	der Pers. C.
1stes	$3a -$	$x -$	y	x	y
2tes	$3a -$	$2x -$	$2y$	$2x$	$2y$
3tes	$9a -$	$6x -$	$6y$	$6x - 6a$	$6y$
4tes	$36a -$	$24x -$	$24y$	$24x - 24a$	$24y - 9a$

Bed $\begin{cases} 24x - 24a = a \\ 24x - 9a = a \end{cases}$

Red. $\begin{cases} 24x = 25a \\ 24y = 10a \end{cases}$

Auflösung.

$x = \frac{25}{24}\,a$ und $y = \frac{5}{12}\,.\,a$

$3a - x - y = \frac{37}{24}\,a.$

Arith=

Arithmetische Auflösung.

A und B haben, nach Vierfachung ihres Geldes, jeder die Summe a; folglich hatten sie vor ihrem Gewinn $\frac{1}{4}$ a; jeder also $\frac{3}{4}$ a gewonnen; und C hat $\frac{3}{2}$ a verloren. Nach diesem Verlust hat aber C noch die Summe a. C hatte also vor ihrem Verlust $\frac{5}{2}$ a.

A und C haben, nach Verdreyfachung ihres Geldes, die erste $\frac{1}{4}$ a, die zweyte $\frac{5}{2}$ a. Vor dem Gewinn, den sie auf Kosten von B machten, hatten sie also jeder nur ein Drittel von jenen Größen, nämlich $\frac{1}{12}$ a und $\frac{5}{6}$ a. Folglich haben sie das doppelte dieser letzten Größen gewonnen, nämlich $\frac{1}{6}$ a, und $\frac{5}{3}$ a; und B hat verloren $\frac{a}{6} + \frac{5}{3}$ a $= \frac{11}{6}$ a. Nach diesem Verlust hat aber B ein Viertheil von a; mithin hatte sie vor demselben $\frac{a}{4} + \frac{11}{6}$ a $= \frac{25}{12}$ a.

B und C haben, nachdem sie ihr Geld auf Kosten von A verdoppelt, die erste $\frac{25}{12}$ a, die zweyte $\frac{5}{6}$ a. Sie hatten also vor ihrem Gewinn $\frac{25}{24}$ a und $\frac{5}{12}$ a; und eben so viel hatten sie gewonnen. A hat folglich $\frac{25}{24}$ a $+ \frac{5}{12}$ a $= \frac{35}{24}$ a verloren. Nach diesem Verlust behielt aber A noch $\frac{1}{12}$ a. Mithin hatte A vor ihrem Verlust, oder anfänglich, $\frac{35}{24}$ a $+ \frac{1}{12}$ a $= \frac{37}{24}$ a.

	A,	B,	C	hatten also
1stens	$\frac{37}{24}$ a	$\frac{25}{24}$ a	$\frac{5}{12}$ a	
2tens	$\frac{1}{12}$ a	$\frac{25}{12}$ a	$\frac{5}{6}$ a	
3tens	$\frac{1}{4}$ a	$\frac{1}{4}$ a	$\frac{5}{2}$ a	
4tens	a	a	a.	

158ste Aufgabe.

Bey dem ersten Spiel haben B und C ihr Geld um die Hälfte vermehrt; bey dem zweyten haben

ben A und C ihr Geld um ein Drittel vermehrt; und bey dem dritten haben A und B ihr Geld um ein Viertel vermehrt. Am Ende haben sie die Summen a, b, c. Wie viel hat jeder anfänglich und nach jedem Spiel?

159ste Aufgabe.

Nach dem ersten Spiel haben B und C jeder $\frac{1}{m}$ mehr, als vorher, oder $\frac{m+1}{m}$ ihres vorherigen Geldes. Nach dem zweyten Spiel haben A und C jeder $\frac{1}{n}$ mehr, als vor demselben, oder $\frac{n+1}{n}$ ihres vorigen Geldes. Und nach dem dritten Spiel haben A und B jeder $\frac{1}{p}$ mehr als vor demselben, oder $\frac{p+1}{p}$ ihres vorigen Geldes. Am Ende haben A, B, C die Summen a, b, c.

Auflösung.

Nennt man x und y das anfängliche Geld von B und C, so ergeben sich für das, was sie viertens und letztens haben, die Ausdrücke:

$$\frac{m+1}{m} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot x - \frac{1}{n} \cdot \frac{p+1}{p}(a+b+c), \text{ und}$$

$$\frac{m+1}{m} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot y - \frac{1}{p}(a+b+c).$$

Ver-

Vermöge der Bedingungen sind also:

$$\begin{cases} \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot x - \frac{1}{n} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot (a+b+c) = b \\ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot y - \frac{1}{p} \cdot (a+b+c) = c \end{cases}$$

Demnach

$$x = \frac{m}{(m+1)n+1} \cdot (a+b+c) + \frac{m\,n\,p}{(m+1)(n+1)(p+1)} \cdot b \cdot$$

$$y = \frac{m \cdot n}{(m+1)(n+1)(p+1)} (a+b+c) - \frac{m \cdot n \cdot p}{(m+1)(n+1)(n+1)} b$$

$$- \frac{m \cdot n \cdot c}{(m+1)(n+1)(p+1)} \cdot c.$$

160ste Aufgabe.

Eine gegebene Anzahl b und b′ Ochsen haben während der gegebenen Zeiten t und t′, das Gras von zwey Wiesen von gegebener Größe p und p′ abgefressen; das Gras war bey ihrem Eintritt von gleicher Höhe und fuhrfort gleichförmig zu wachsen. Man sieht die Anzahl b″ Ochsen, welche eine dritte der ersten ähnliche Wiese p″ in der gegebenen Zeit t″ abweiden.

Auflösung.

Man denke sich jede der Zahlen b und b′ in zwey Theile $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'$ zerlegt, so, daß angenommen wird, daß die durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ angegebenen Ochsen nur das Gras, das sie beym Eintritt auf die Wiesen p und p′ finden, und die Ochsen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, das von ihrem Eintritt an beständig nachwachsende Gras verzehren.

Die

Die Zahlen C und C′ sind im direkten Verhältnisse der Größe der Wiesen, und im umgekehrten Verhältniß der Zeiten, in welchen sie dieselben abweiden, d. h. wie $\frac{p}{t}$ und $\frac{p'}{t'}$.

Die Zahlen C und C′ sind auch in dem zusammengesetzten Verhältniß aus dem direkten Verhältniß des abzuweidenden Grases, und dem umgekehrten der hierzu gebrauchten Zeiten. Nun ist aber das gleichförmig wachsende Gras im direkten Verhältniß der Größe der Wiesen und der Zeiten, während welcher das Gras darauf wächst; mithin verhalten sich die Zahlen C und C′ direkte, wie die Größe der Wiesen p und p′.

Man muß also die Zahlen b und b′ zerlegen zuerst in die Theile C und C, und zweytens in die Theile C′ und B′, so daß

$$C : C' = \frac{p}{t} : \frac{p'}{t'}$$

$$\text{und } B : B' = p : p';$$

$$\text{hieraus } C = b \cdot \frac{t'}{t' - t} - b' \frac{p}{p'} \cdot \frac{t'}{t' - t};$$

$$B = b' \cdot \frac{p}{p'} \cdot \frac{t'}{t' - t} - b \cdot \frac{t}{t' - t}$$

$$C' = b \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{t}{t' - t} - b' \cdot \frac{t}{t' - t};$$

$$B' = b' \cdot \frac{t'}{t' - t} - b \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{t}{t' - t}.$$

Man stelle sich eben so die gesuchte Anzahl b″ der Ochsen, welche die Wiese p″ in der Zeit t″ abweiden in die Theile C″ und B″, zerlegt vor, deren einer das Gras verzehrt, was sie bey ihrem Eintritt auf der

Wiese finden; der andere aber dasjenige verzehrt, was nach ihrem Eintritt gleichförmig zuwächst. Man hat also:

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{C}'' = \frac{p}{t} : \frac{p''}{t''} = \frac{p}{p''} : \frac{t}{t''};$$

$$\mathfrak{C}'' = \mathfrak{C} \cdot \frac{t}{t''} \cdot \frac{p''}{p} = b \cdot \frac{p''}{p} \cdot \frac{t}{t''} \cdot \frac{t'}{t' - t} - b \; \frac{p''}{p} \cdot \frac{t}{t''} \cdot \frac{t'}{t' - t}.$$

$$\beta'' = \beta \cdot \frac{p''}{p} = b' \cdot \frac{p''}{p'} \cdot \frac{t'}{t' - t} - b \cdot \frac{p''}{p} \cdot \frac{t}{t' - t}.$$

Daraus:

$$b'' = b \cdot \frac{p''}{p} \cdot \frac{t}{t' - t} \left(\frac{t'}{t''} - 1 \right) + b' \cdot \frac{p''}{p'} \cdot \frac{t'}{t' - t} \left(1 - \frac{t}{t''} \right).$$

$$= b \cdot \frac{p''}{p} \cdot \frac{t}{t''} \cdot \frac{t' - t''}{t' - t} + b' \cdot \frac{p''}{p'} \cdot \frac{t'}{t''} \cdot \frac{t - t''}{t - t'}.$$

Erstes Beyspiel.

Es sey $t = 12 \mid p = 60$
$t' = 15 \mid p' = 72$
$t'' = 18 \mid p'' = 96.$

$$\mathfrak{C}'' = b \cdot \tfrac{96}{60} \cdot \tfrac{12}{18} \cdot \tfrac{15}{3} - b' \cdot \tfrac{96}{72} \cdot \tfrac{12}{18} \cdot \tfrac{15}{3} = \tfrac{16}{3} \cdot b - \tfrac{40}{9} \cdot b'.$$

$$\beta'' = b' \cdot \tfrac{96}{72} \cdot \tfrac{15}{3} - b \cdot \tfrac{96}{60} \; \tfrac{12}{3} = \tfrac{20}{3} \cdot b' - \tfrac{32}{5} b.$$

Es sey $b' = 81 \mid \mathfrak{C}'' = 400 - 360 = 40$
$b = 75 \mid \beta'' = 540 - 480 = 60$ $\Big| \; b'' = 40 + 60 = 100$

Wenn demnach, 75 Ochsen in 12 Tagen eine Wiese von 60 Morgen abgeweidet haben (den ausgesetzten

setzten Bedingungen gemäß), und wenn 81 Ochsen in 15 Tagen eine Wiese von 72 Morgen abgeweidet haben, so werden 100 Ochsen erfordert, um in 18 Tagen eine Wiese von 96 Morgen abzuweiden.

Zweytes Beyspiel.

Es sey

$t = 4$	$p = 10$	$b = 12$
$t' = 9$	$p' = 30$	$b' = 21$
$t'' = 18$	$p'' = 72$	

so findet man $b'' = 36$, welches mit dem Beyspiel der 11ten Aufgabe in Stentens Arith. universalis übereinstimmt.

Drittes Beyspiel.

Es sey

$t = 12$	$p = 15$	$b = 20$
$t' = 16$	$p' = 24$	$b' = 30$
$t'' = 8$	$p'' = 30$	folgl. $b'' = 45$ Ochsen.

Anmerk. Wenn von den 9 Größen

b, p, t
b', p', t'
b'', p'', t'' 8 beliebige gegeben sind, so kann man die 9te bestimmen, und insbesondere wenn je zwey von den drey Größen b'', p'', t'', bekannt sind, so bestimmt man die dritte, durch diese zwey Größen und durch die sechs ersten

b, p, t
b', p', t'. Man hat: $p'' = \frac{pp'b''t''(t'-t)}{bp't(t'-t)-b'pt'(t-t'')}$

$$t'' = \frac{tt'p''(bp'-b'p)}{tp'(bp''-b''p)-t'p(b'p''-b''p')}$$

Zweyte Auflösung.

Es sey h die anfängliche Höhe des Grases auf jeder der Wiesen; z der Wachsthum des Grases in einer gege-

gegebenen als Einheit genommenen Zeit, auf einem gegebenen als Einheit genommenen Raum: die totalen Mengen auf den Wiesen p, p′, p″, während der Zeiten t, t′, t″, des enthaltenen Grases, sind respektive $ph + ptz$, $p'h + p't'z$, $p''h + p''t''z$. Diese Größen sind unter sich wie die Produkte der Zahl der Ochsen, die sie aufzehren in den Zeiten, während welcher sie solche aufzehren. Man hat also, um Z zu bestimmen, diese Proportion:

$$bt : b't' = ph + ptz : p'h + p't'z,$$ woraus folgt

$$bhp't + bp'tt'z : b'hpt' + b'ptt'z.$$

Es sey z. B. $bp' > b'p$; $z = h \cdot \frac{b'pt' - bp't}{tt'(bp' - b'p)}$.

$$ph + ptz = \frac{pp'bh(t'-t)}{t'(bp'-b'p)}; \quad p'h + p't'z = \frac{pp'b'h(t'-t)}{t(bp'-b'p)};$$

$$p''h + p''t''z = p''h \cdot \frac{bp't(t'-t) - b'pt'(t-t')}{tt'(bp'-b'p)}.$$

Es verhält sich aber

$$ph + ptz : p''h + p''t''z = bt : b''t'';$$

daraus

$$b'' = b \cdot \frac{p''}{p} \cdot \frac{t}{t''} \cdot \frac{t'-t''}{t'-t} + b' \cdot \frac{p''}{p'} \cdot \frac{t'}{t''} \cdot \frac{t-t''}{t-t'}.$$

Man kann diese Aufgabe noch allgemeiner machen, wenn man nicht annimmt, daß anfänglich das Gras auf alle drey Wiesen gleich hoch gewesen sey.

Die Auflösung dieser verallgemeinerten Aufgabe wäre so:

Es sey M″ die ganze Masse des Grases, welche auf einen Morgen steht, und welche für verschiedene Morgen der mittlern Höhe des Grases proportionel angenom-

genommen werden darf, indem man übrigens beyde Morgen überall gleich fruchtbar annimt. Z bezeichne eben so den Zuwachs in der Einheit der Zeit, welchen diese Masse, diese Fruchtbarkeit gemäß hat; und durch y bezeichne man die Verminderung in derselben Einheit der Zeit, welche diese Masse durch jeden der weidenden Ochsen erleidet.

Hiernach beträgt die ganze Masse Gras, welche auf p'' fache Morgen wächst, $p''.M''$; und der Zuwachs dieser Masse in der Zeit t'', ist $p''t''z$. Anderseits beträgt die ganze Verzehrung in derselben Zeit von b'' Ochsen $b''t''y$. Bezeichnet man nun durch t'' die Zeit, nach deren Ablauf das Gras verzehrt ist, so hat man

$$p''M'' = b''t''y - p''t''z$$

eine Gleichung vom ersten Grade, welche die Auflösung der Aufgabe enthält, es sey nun, daß man p'', oder b'', oder t'' als unbekannte Größen ansieht, deren Anwendung aber voraussetzt, daß die beständigen Größen z und y durch Beobachtungen bestimmt werden.

Wenn die folgenden Buchstaben mit jenen ähnliche Bedeutung haben, so hat man noch folgende zwey Gleichungen:

$$pM = pty - ptz$$
$$p'M' = p't'y - p't'z$$

woraus sich ergiebt

$$z = \frac{b'pt'M - bp'tM'}{tt'(bp' - b'p)}$$

und $$y = \frac{p \cdot p'(t'M - t \cdot M')}{t \cdot t'(bp' - b'p}$$

Da also die beständigen Größen z und y bestimmt sind, so wird die Gleichung

$p''M''$

$$p''M'' = bty - ptz$$

diejenigen der drey Zahlen p, b, oder t kennen lehren, welche, in einem besondern Fall, wenn man will, die unbekannte Größe der Aufgabe seyn soll.

Newton hat dieser Aufgabe eine Art von Ruf gegeben, indessen hat er sie nur da besonders behandelt, wo angenommen wird, daß das Gras auf allen drey Wiesen anfänglich von gleicher Höhe gewesen ist, so wie solche unter dieser Voraussetzung von uns zuerst aufgelöst worden ist. Bey dieser Annahme sind nämlich die drey Größen M, M′, M″ einander gleich. Substituirt man in diesem Falle statt z und y die oben gefundene Werthe in der Gleichung

$$p''M'' = b''t''y - p''t''z,$$

so erhält man

$$p''tt'(bp' - b'p) + p'tt''(b''p - bp'') + pt't''(b'p - bp') = 0$$

und daraus den Werth von b″, wie oben.

Für die bestimmten Werthe im oben gegebenen zweyten Beyspiele finden wir

$$z = \tfrac{1}{1\frac{1}{2}}\,M \quad \text{und} \quad y = \tfrac{5}{5\frac{1}{4}}\,M.$$

Diese Brüche zeigen an, daß in Newtons Beyspiel das Gras in der angenommenen Einheit der Zeit um $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ seiner ganzen Höhe gewachsen ist, und daß jeder Ochse in derselben Zeit $\frac{5}{5\frac{1}{4}}$ oder ohngefähr $\frac{1}{11}$ von einem zur Einheit angenommenen Morgen aufzehrt.

Anmerk. Um diese Aufgabe auflösen zu können, haben wir angenommen, daß die drey Wiesen überall einerley Fruchtbarkeit haben; daß anfänglich das Gras auf allen drey Wiesen dieselbe mittlere Höhe hat, und diese Höhe uns für jede der drey Wiesen bekannt sey,

und daß überdem das Gras gleichförmig darauf wächst; d. h. in gleichen Zeiten gleich viel Zuwachs hat.

Diese drey Voraussetzungen, obgleich nicht ganz strenge wahr, doch wenigstens in gewissen Fällen ziemlich genau, sind nöthig, damit die Algebra, unterstützt von den Datis, die nur die Erfahrung zu geben im Stande ist, mit der Auflösung dieser Aufgabe sich befassen kann.

Aufgaben mit drey unbekannten Größen.

161ste Aufgabe.

Ein Sohn ward gefragt, wie alt Er, sein Vater und sein Großvater wären? Er antwortete: Ich und der Vater, wir sind zusammen 54 Jahre; der Vater und der Großvater zusammen 109 Jahre; der Großvater und ich zusammen 85 Jahre. Wie alt ist jeder gewesen?

Auflösung.

Der Großvater hatte x Jahre;
der Vater $=$ y —
der Sohn $=$ z —

Nun ist nach der Aufgabe:

$$\text{I.} \quad y + z = 54$$
$$\text{II.} \quad x + y = 109$$
$$\text{III.} \quad x + z = 85$$

Aus

Aus I. und II. folgt IV. $x - z = 55$
Aus IV. und III. folgt = $2x = 140$
V. $x = 70$
Aus V. und II. folgt = $y = 39$
Aus V. und III. folgt = $z = 15$.

Zweyte Auflösung.

I., II. und III. geben, addirt

$$2(x + y + z) = 248$$
$$x + y + z = 124$$

Da nun I. = $y + z = 54$
so ist $x = 70$ u. s. f.

Dritte Auflösung.

Man bezeichne das Alter von allen dreyen mit s, so ist:

$$s - x = 54$$
$$s - z = 109$$
$$s - y = 85$$

$$3s - (x + y + z) = 248$$
$$2s = 248$$
$$s = 124$$

also $x = s - 54$
$y = s - 85$
$z = s - 109$.

162ste Aufgabe.

Zu einem Geschäfte werden drey Arbeitsleute, A, B, C, gedungen; der erste bekommt täglich 8 gr., der zweyte 7 gr., der dritte 6 gr. Sie

haben überall 146 Tage Lohn verdient; nun findet sich, daß jeder gleich viel ausgezahlt erhalten hat. Wie viel Tage hat nun jeder gearbeitet?

Auflösung.

A arbeitet x Tage und bekommt in dieser Zeit $6x$ gr.
B = y = = $7y$ gr.
C = z = = $7z$ gr.

Nach der Aufgabe ist I. $x + y + z = 146$
II. $6x = 7y$
III. $7y = 8z$

Also $x = \frac{7y}{6}$
IV. $y = \frac{8z}{7}$
} demnach V. $x = \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot z = \frac{4}{3} z$

Mithin $\frac{4}{3} z + \frac{8}{7} z = 146$
$\frac{73}{21} z = 146$

folglich $z = 21 \cdot \frac{146}{73} = 21 \cdot 2 = 42$

daher aus V. $x = \frac{4}{3} \cdot 42 = 4 \cdot 14 = 56$
und aus IV. $y = \frac{8}{7} \cdot 42 = 8 \cdot 6 = 48$

163ste Aufgabe.

Ein Faß Wein würde mit Verlust für a rthlr. verkauft. Wäre es aber für b rthlr. verkauft, so wäre der Gewinn n mal so groß gewesen, als der Verlust war. Wie theuer ist es eingekauft worden?

Auflösung.

Das Faß koste x rthlr., der Verlust sey y rthlr., der Gewinn z, so ist

$$\text{I.} \quad y = x - a$$
$$\text{II.} \quad z = b - x$$
$$\text{III.} \quad z = n \cdot y$$

Aus I. und III. folgt IV. $z = nx - na$

= II. und IV. folgt V. $x = \frac{na + b}{n + 1}$

= I. und V. folgt VI. $y = \frac{b - a}{n + 1}$

= III. und VI folgt $z = \frac{n(b - a)}{n + 1}$

Es sey $a = 224$;
$b = 260$
$n = 3$

Daher

$x = 233$
$y = 9$
$z = 27$

164ste Aufgabe.

Ich kaufte vieles Tuch, 5 Ellen für 7 rthlr., und verkaufte es wieder 7 Ellen für 11 rthlr. Bey dem Handel habe ich 100 rthlr. gewonnen. Wie viel Ellen Tuch sind es gewesen? Welches war der Einkaufs- und welches der Verkaufspreis?

Auflö-

Auflösung.

Die Anzahl der Ellen sey x
Der Einkaufspreis sey y rthlr.
Der Verkaufspreis sey z —

so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 5 : x = 7 : y \\ \text{und } 7 : x = 11 : z \end{array}\right\} \text{ also } \left\{\begin{array}{l} y = \frac{7x}{5} \\ z = 1\frac{1}{7} \cdot x \end{array}\right.$$

Daher nach der Aufgabe

$$\frac{7x}{5} + 100 = 1\frac{1}{7} \cdot x$$

$$100 = 1\frac{1}{7} \cdot x - \frac{7x}{5}$$

$$100 = \frac{6x}{35}$$

folglich $x = \frac{3500}{6} = 583\frac{1}{3}$ Ellen;
daher $y = 816\frac{2}{3}$ rthlr.
und $z = 916\frac{2}{3}$ rthlr.

165ste Aufgabe.

Es kauft Jemand dreyerley Papier; das Ries des besten kostet $2\frac{1}{2}$ rthlr., das Ries des geringern 2 rthlr., das Ries des geringsten 1 rthlr. Er nimmt des besten nur $\frac{1}{2}$ so viel als des mittlern, und des mittlern nur halb so viel als des geringsten, und bezahlt dafür zusammen $52\frac{1}{2}$ rthlr. Wie viel hat er nun von jeder Sorte bekommen?

Auflösung.

Vom besten x Ries, kosten $= 2\frac{1}{2} \cdot x$ rthlr.
Vom mittlern y Ries, kosten $= 2 \cdot y$ —
Vom geringsten z Ries, kosten $= z$ —

Er

Er nimmt des besten nur halb so viel als des mittlern.

Daher I. $2x = y$

und des mittlern nur halb so viel als des schlechtern,

daher II. $2y = z$

Nun ist nach der Aufgabe

III. $2\frac{1}{2}x + 2y + z = 52\frac{1}{2}$

Aus II. und III. folgt IV. $2\frac{1}{2}x + 4y = 52\frac{1}{2}$

Aus IV. und I. folgt $10\frac{1}{2}x = 52\frac{1}{2}$.

Daher V. $x = 5$

Aus V. und I. folgt VI. $y = 10$

Aus VI. und II. folgt $z = 20$.

166ste Aufgabe.

Es kauft Jemand für 15 rthlr. Nelken, Pfeffer und Ingwer; das Pfund Ingwer kostet 9 gr., das Pfund Pfeffer 18 gr., das Pfund Nelken 27 gr. Wenn er 1 Pfund Nelken kauft, so will er 2 Pfund Pfeffer und 3 Pfund Ingwer haben. Jetzt ist die Frage, wie viel er von jedem Gewürze besonders bekommen?

Auflösung.

Er kauft x ℔. Nelken, die kosten	$27x$ gr.
y ℔. Pfeffer für	$18y$ gr.
z ℔. Ingwer für	$9z$ gr.

Es

Es ist nach der Aufgabe:

$$27x + 18y + 9z = 15 \cdot 24 \text{ gr.}$$

mit 9 dividirt

also I. $3x + 2y + z = 5 \cdot 8 = 40$ gr.

II. $y = 2x$ und III. $z = 3x$.

Die Werthe von y und z aus II. und III. in I. gesetzt, giebt:

$$3x + 4x + 3x = 40$$
$$10x = 40$$
folgl. $x = 4$
Aus II. folgt $y = 8$
Aus III. folgt $z = 12$.

Anmerk. Wären Mariengr. gerechnet, so hätte man:

$$3x + 2y + z = 15 \cdot 4 = 60$$
und daraus $x = 6$
$y = 12$
$z = 18$.

167ste Aufgabe.

Von drey Personen hatte jede eine Summe Geldes. A sagte zu B: gieb mir 100 rthlr. von deinem Gelde zu meinem, so habe ich zweymal so viel, als du behältst. B sagte zu C: gieb mir 200 rthlr. von deinem zu meinem Gelde, so habe ich dreymal so viel, als du behältst. C sagte zu A: gieb mir 60 rthlr. von deinem Gelde zu meinem, so habe ich fünfmal so viel, als du behältst. Wie viel hat jede gehabt?

Auflösung.

Wenn A x, B y, C z rthlr. hatte, so war nach der Aufgabe:

I. $x + 100 = 2(y - 100) = 2y - 200$
II. $y + 200 = 3(z - 200) = 3z - 600$
III. $z + 60 = 5(x - 60) = 5x - 300$

Aus I. und II. folgt $6z = 1900 + x$
und aus III. folgt $6z = 30x - 2160$

Also ist: $29x = 4060$
$x = 140$
$z = 340$
$y = 220$.

168ste Aufgabe.

Drey Personen, A, B und C, haben ein Pferd gekauft für 100 rthlr. Die erste begehrt von der zweyten die Hälfte ihres Geldes, so könnte sie das Pferd allein bezahlen; die zweyte begehrt von der dritten $\frac{1}{3}$ ihres Geldes, so wäre ihr Vorrath hinreichend; die dritte begehrt von der ersten $\frac{1}{4}$ ihres Geldes, so könnte sie die Zahlung leisten. Wie viel hat jede Person Geld gehabt?

Auflösung.

Es habe A x rthlr., B y rthlr., C z rthlr.; so verlangt, um das Pferd allein zu bezahlen, das 100 rthlr. kostet,

A zu seinem Gelde $\frac{1}{2}$ y
B = = $\frac{1}{3}$ z
C = = $\frac{1}{4}$ x

daher

I. $x + \frac{1}{2}y = 100$
II. $y + \frac{1}{3}z = 100$
III. $z + \frac{1}{4}x = 100.$

Aus I. und II. folgt $6x - z = 300$
dazu III. addirt, giebt = $6\frac{1}{4}x = 400$
folglich $x = 64$
$z = 84$
$y = 72.$

169ste Aufgabe.

Drey Personen hatten in einer Herberge eine Summe Geldes verzehrt; keine konnte aber allein bezahlen, daher spricht A zu B: gieb mir $\frac{1}{4}$ deines Geldes zu meinem, so kann ich bezahlen. B spricht zu C: gieb mir $\frac{1}{8}$ deines Geldes zu meinem, so kann ich bezahlen. C spricht zu A: gieb mir die Hälfte deines Geldes zu meinem, so kann ich bezahlen, ob ich gleich nur 4 rthlr. habe. Wie viel hatten sie nun verzehrt, und wie viel hatte A und B Vorrath?

Auflösung.

Betrug das verzehrte Geld z, und A hatte bey sich x, B y und C 4 rthlr., so war nach der Aufgabe

$$\text{I. } x + \tfrac{1}{4}y = z$$
$$\text{II. } y + \tfrac{1}{2} = z$$
$$\text{III. } 4 + \tfrac{1}{2}x = z$$

Aus I. und II. folgt $x = \tfrac{3}{4}y + \tfrac{1}{2}$

Aus II. und III. folgt $x = 2y - 7$

Also ist $\tfrac{3}{4}y + \tfrac{1}{2} = 2y - 7$

folglich $y = 6$; $x = 5$; $z = 6\tfrac{1}{2}$.

170ste Aufgabe.

Man soll drey Zahlen von solcher Beschaffenheit finden, daß, wenn die erste mit der zweyten multiplizirt wird, viermal so viel kommt, als die Summe der drey Zahlen; wird die erste mit der dritten multiplizirt; fünfmal so viel kommt, als die Summe der drey Zahlen; wird die zweyte mit der dritten multiplizirt, sechsmal so viel kommt, als die Summe der drey Zahlen. Welches sind die Zahlen?

Auflösung.

Sind die drey Zahlen x, y und z, so ist nach der Aufgabe:

$$\text{I. } xy = 4(x + y + z)$$
$$\text{II. } xz = 5(x + y + z)$$
$$\text{III. } yz = 6(x + y + z)$$

Aus I. und II. folgt IV. $4z = 5y$

$$z = y + \tfrac{1}{4}y$$

Man setze $y = 4u$

so ist V. $z = 5u$

Aus

Aus I. und III. folgt VI. $z = \frac{3x}{2}$

Aus V. und VI. folgt $x = \frac{10u}{3} = 3u + \frac{u}{3}$

Setzt man nun $u = 3v$

so ist VII. $x = 10v$

Aus V. und VII. folgt VIII. $z = 15 \cdot v$

Aus IV. und VIII. folgt IX. $y = 12v$

Aus I., VII., VIII. und IX. folgt $120v = 148$

Also $v = \frac{37}{30}$

Daher $x = 12\frac{1}{3}$

$y = 14\frac{4}{5}$

$z = 18\frac{1}{2}$.

171ste Aufgabe.

Ein Wechsler hat drey Beutel mit A, B und C bezeichnet und wird gefragt, wie viel Thaler in jedem Beutel wären? Er antwortet: Nehme ich aus B 80 rthlr. und lege sie zu A, so ist in A $2\frac{1}{2}$ mal so viel, als in B bleibt; nehme ich aus C 120 rthlr und lege sie zu B, so ist in B $3\frac{1}{2}$ mal so viel, als in C bleibt; nehme ich aus A 60 rthlr. und lege sie zu C, so ist in C $4\frac{1}{3}$ mal so viel, als in A bleibt. Wie viel ist in jedem Beutel gewesen?

Auflösung.

Befinden sich x rthlr. im Beutel A, y im Beutel B, z im Beutel C, so ist nach der Aufgabe:

I. x

I. $x + 80 = \frac{5}{2}(y - 80)$ oder $2x = 5y - 560$
II. $y + 120 = \frac{7}{2}(z - 120)$ oder $2y = 7z - 1080$
III. $z + 60 = \frac{13}{3}(x - 60)$ oder $3z = 13x - 960$

Man multiplizire I. durch 2 und II. durch 5, so ist:

$$10y - 1120 = 4x \text{ und}$$
$$10y + 5400 = 35z$$

Die obere von der untern subtrahirt, giebt

IV. $35 - z - 4x = 6500$;

diese Gleichung mit 13 multiplizirt, giebt

$$455z - 52x = 84760.$$

VI Die Gleichung III. durch 4 multiplizirt, giebt

$12z - 52x = -3840$, und diese von der obern abgezogen,

giebt $443z = 88600$.

Daher $z = 200$
$y = 160$
$x = 120$.

172ste Aufgabe.

Drey Kinder werden mit Aepfeln beschenkt, die sie ohne Ordnung zu sich nehmen; da aber das älteste hernach findet, daß es bey weitem die meisten hat, so giebt es von den beyden andern einem jeden so viel, als es schon hat. Eben das thut auch das zweyte und hernach auch das dritte, und nun findet sich, daß ein jedes 8 Aepfel bekommen hat. Wie viel hat jedes Kind anfangs erhalten?

Auflö-

Auflösung.

Namen der Kinder	Hatten anfänglich Aepfel	Hatten, nachdem A mitgetheilt hatte	Hatten, nachdem B mitgetheilt hatte	Hatten, nachdem C mitgetheilt hatte, nach der Aufgabe:
A	x	$x-y-z$	$2x-2y-2z$	$4x-4y-4z=8$. I.
B	y	$2y$	$3y-x-z$	$6y-2x-2z=8$. II.
C	z	$2z$	$4z$	$7z-x-y=8$. III.

Die Gleichung II. durch 2 multiplizirt, giebt

$$12y-4x-4z=16$$

dazu addirt die Gleichung I. $4x-4y-4z=8$

giebt $8y-8z=24$

oder $y=z+4$. IV.

Die Gleichung III. durch 4 multiplizirt, giebt

$$28z-4x-4y=32.$$

dazu die Gleichung I. $4x-4y-4z=8$ addirt,

giebt $24z-8y=40$

oder $y=3z-5$. V.

Die Gleichung IV. und V. abgezogen, giebt

$$0=22z-8$$

folglich $z=4$

$y=7$

$x=13$.

173ste Aufgabe.

A, B, C sind zusammen 2190 rthlr. schuldig; keiner kann diese Summe allein bezahlen. Wenn sie sich aber vereinigen, so kann solches auf

auf dreyerley Weise geschehen; nämlich: wenn B $\frac{3}{7}$ seines Vermögens zum ganzen Vermögen des A legt, oder, wenn C $\frac{5}{9}$ seines Vermögens zu dem des B legt, oder, wenn A $\frac{2}{3}$ seines Vermögens zu dem des C legt. Wie viel besitzt demnach jeder von ihnen?

Auflösung.

Es habe A, B, C
im Vermögen x, y, z rthlr.

So geben die Bedingungen der Aufgabe folgende drey Gleichungen:

I. $\frac{3}{7}y + x = 2190$ also IV. $3y + 7x = 7 . 2190$
II. $\frac{5}{9}z + y = 2190$ „ V. $5z + 9y = 9\ 2190$
III. $\frac{2}{3}x + z = 2190$ „ VI. $2x + 3z = 3 . 2190$

3mal IV. weniger V. giebt

$21x - 5z = 12 . 2190$ mit 3 multipl.

giebt $63x - 15z = 36 . 2190$
5mal VI $= 10x + 15z = 15 . 2190$ addirt,

giebt $73x = 51 . 2190$

folglich $x = \frac{51 . 2190}{73} = 51 . 30 = 1530$ rthlr.

Aus IV. folgt $z = 7 . 730 - \frac{7x}{3} = 7 . (730 - 510)$
$= 7 . 220 = 1540$ rthl.

Aus VI. folgt $z = 2190 - \frac{2x}{3} = 2190 - 1020$
$= 1170$ rthlr.

174ste Aufgabe.

A und B besitzen zusammen nur $\frac{2}{3}$ von dem Vermögen eines dritten, C; B und C haben zusammen

sammen 6mal so viel, als A; wäre B um 680 rthlr. reicher, als er wirklich ist, dann würde er so reich, als A und B zusammen, seyn. Wie reich ist jeder?

Auflösung.

Das Vermögen von A, B und C sey x, y und z, so erhalten wir, der Aufgabe gemäß, folgende drey Gleichungen:

$$\text{I.}\quad x + y = \tfrac{2}{3}z$$
$$\text{II.}\quad y + z = 6x$$
$$\text{III.}\quad x + z = y + 680;$$

also $x = \tfrac{2}{3}z - y$, diesen Werth von x in II. gesetzt, giebt:

$$y + z = 4z - 6y, \text{ daraus}$$

folgt IV. $z = \tfrac{7}{3}y$.

Aus III. folgt $x = y + 680 - z$;

diesen Werth in II. gesetzt, giebt

$$y + z = 6y + 4080 - 6z, \text{ daraus}$$

$$z = \frac{5z + 4080}{7}, \text{ demnach wegen}$$

$$\tfrac{7}{3}y = \frac{5y + 4080}{7}$$

$$49y = 15y + 3 \cdot 4080$$
$$34y = 3 \cdot 4080;$$

folglich $y = \frac{3 \cdot 4080}{34} = 3 \cdot 120 = 360$ rthlr.

Aus IV. folgt $z = \tfrac{7}{3} \cdot 360 = 7 \cdot 120 = 840$ rthlr.

Aus I. folgt $x = \tfrac{2}{3} \cdot 840 - 360 = 2 \cdot 280 - 360$

$= 560 - 360 = 200$ rth.

Zweyte Auflösung.

Man subtrahire (II.) von I., so ergiebt sich daraus

$$x = \frac{5}{21} \cdot z.$$

Ferner multiplizire man (I.) mit 6, addire (II.) dazu, so findet sich

$$y = \frac{3}{7} \cdot z.$$

Substituirt man nun die Werthe von x und y in (III.), so ergiebt sich

daraus $z = 840$
und also $y = 360$
$x = 200.$

175ste Aufgabe.

Ich habe drey Geldbeutel vor mir stehen; in jedem befindet sich eine gewisse Summe Geldes. Nehme ich aus dem ersten Beutel 20 rthlr. und lege sie dem zweyten zu, so ist in diesem 4mal so viel Geld, als in jenem noch übrig ist. Nehme ich aus dem zweyten Beutel 60 rthlr. und lege sie dem dritten zu, so ist in diesem $1\frac{3}{4}$mal so viel, als in jenem noch übrig ist. Nehme ich hingegen aus dem dritten 40 rthlr. und lege sie dem ersten zu, so bleibt im dritten doch noch $2\frac{7}{8}$mal so viel, als im ersten nach der Zulage seyn wird. Wie viel befindet sich in jedem Beutel?

Auflösung.

Im ersten Geldbeutel mag x rthlr.
Im zweyten = = y —
Im dritten = = z — enthalten seyn;
so liefert die Aufgabe folgende drey Gleichungen:

I. $4(x - 20) = y + 20$
II. $\frac{7}{4}(y - 60) = z + 60$
III. $z - 40 = \frac{23}{8}(x + 40)$;

also IV. $x = \frac{y + 100}{4}$; diesen Werth von x in III. gesetzt, giebt

V. $z = \frac{23y + 2300}{32} + 155$;

den in V. gefundenen Werth von z in II. gesetzt, giebt

$$7y - 420 = \frac{23y + 2300}{8} + 860$$
$$7y = \frac{23y + 2300}{8} + 1280$$
$$56y = 23y + 2300 + 10240$$
$$33y = 12540$$
$$11y = 4150$$

folgl. $y = 380$ rthlr.; demnach aus IV.
$x = \frac{480}{4} = 120$ rthlr., und aus III.
$z = \frac{23}{8}.160. + 40 = 23.20 + 2.20 = 25.20$
$= 500$ rth.

176ste Aufgabe.

A, B und C vergleichen ihr Vermögen. A sagt zu B: gieb mir 700 rthlr. von deinem Gelde, so habe ich zweymal so viel, als du behälst.

B sagt zu C: gieb mir 1400 rthlr., so habe ich dreymal so viel, als du behälst. C sagt zu A: gieb mir 400 rthlr., so habe ich fünfmal so viel, als du behälst. Wie viel hat jeder?

Auflösung.

Das Vermögen von A, B und C sey x, y und z rthlr.; so ergeben sich aus der Aufgabe folgende drey Gleichungen:

$$\text{I.}\quad x + 700 = 2\,(y - 700)$$
$$\text{II.}\quad y + 1400 = 3\,(z - 1400)$$
$$\text{III.}\quad z + 420 = 5\,(x - 420)$$

also IV. $x = 2y - 2100$; dieß für x in III. gesetzt, giebt

V. $z = 10y - 13020$; dieses statt z in II. gesetzt, giebt

$y = \frac{44660}{29} = 1540$ rthlr. IV. giebt

$x = 980$ rthlr., und V. giebt

$z = 2380$ rthlr.

177ste Aufgabe.

Es werden drey Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht. Wenn man von der ersten 4 abzieht und eben so viel der zweyten zusetzt, so verhält sich der Rest zur Summe wie 1 zu 2. Zieht man von der zweyten 10 ab und setzt der dritten eben so viel zu, so verhält sich der Rest zur Summe, wie 3 zu 10. Zieht man aber von der ersten 5 ab und setzt diese der dritten

zu, so verhält sich der Rest zur Summe wie 3 zu 11. Welche Zahlen sind es?

Auflösung.

Die gesuchten drey Zahlen seyen x, y und z.

laut der Aufgabe soll seyn:

$$x - 4 : y + 4 = 1 : 2$$
$$y - 10 : z + 10 = 3 : 10$$
$$\text{und } x - 5 : z + 5 = 3 : 11$$

also I. $2x - 8 = y + 4$

II. $10y - 100 = 3z + 30$

III. $11x - 55 = 3z + 15$

II. weniger III. giebt $10y - 11x = 60$
10mal I. giebt $20x - 10y = 120$ } addirt

$$9x = 180$$
folglich $$x = 20$$

I. giebt $y = 2x - 12 = 28$

II. giebt $z = \frac{10y - 130}{3} = \frac{280 - 130}{3} = \frac{150}{3} = 50.$

178ste Aufgabe.

Drey Personen haben zusammen eine gewisse Summe verzehrt; keiner aber ist im Stande, sie allein zu bezahlen. A sagt daher zu B: gieb mir den vierten Theil deines Geldes, so kann ich sie allein bezahlen. B sagt zu C: gieb mir den achten Theil deines Geldes, so kann ich sie ebenfalls bezahlen. Darauf sagt C zu A:

A: auch ich kann sie bezahlen, wenn ich von dir die Hälfte deines Geldes erhalte, ob ich gleich nur 4 rthlr. besitze. Wie viel haben sie verzehrt, und wie viel hat A und B?

Auflösung.

Das Geld, was eine jede der drey Personen A, B und C bey sich hat, sey x, y und z rthlr.

So haben wir, der Aufgabe gemäß:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x + \frac{y}{4} \\ \text{II.} & y + \frac{z}{8} \\ \text{III.} & z + \frac{x}{2} \end{array}\right\} = \text{der Zeche.}$$

Laut der Angabe ist $z = 4$;
daher giebt III. und I folgende Gleichung:

$$4 + \frac{x}{2} = x + \frac{y}{4}$$

$$16 + 2x = 4 + y;$$

also IV. $16 - 2x = y$

II. und I. geben

$$y + \frac{1}{2} = x + \frac{y}{8};$$

also V. $y = \frac{4x}{3} - 2$

V. und IV. geben

$$\frac{4x}{3} - 2 = 16 - 2x$$

daraus $x = 5$ rthlr.

aus IV. $y = 6$ —

Die Zeche $4 + \frac{x}{2} = 6\frac{1}{2}$ rthlr.

179ste Aufgabe.

Jemand hat drey Stücke Silber von ungleichem Gehalte, nämlich 15', 10' und 9löthiges. Schmelzt man das 15' und 10löthige zusammen, so entsteht daraus ein Silber, dessen Gehalt $11\frac{2}{3}$ Loth ist. Von dem nämlichen Gehalte wird auch das Silber seyn, welches entsteht, wenn man das 15' und 9löthige zusammenschmelzt. Alle drey Stücke wiegen zusammen 34 Mark. Wie viel wiegt jedes Stück insbesondere?

Auflösung.

Die drey Stücken A, B und C haben jedes an Gewicht x, y und z Mark. So geben die Bedingungen der Aufgabe folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad 15x + 10y = 11\tfrac{2}{3}(x + y)$$
$$\text{II} \quad 15x + 9z = 11\tfrac{2}{3}(x + z)$$
$$\text{III.} \quad x + y + z = 34,$$

oder $45x + 30y = 35x + 35y$, daraus

$$\text{IV.} \quad x = \tfrac{y}{2}$$

I. weniger II giebt $10y - 9z = 11\frac{2}{3}(y - z)$

daraus $\text{V.} \quad z = \frac{5}{8}y$.

Der Werth von x in IV. und von z in V. in III. gesetzt, giebt

$$\tfrac{y}{2} + y + \tfrac{5}{8}y = 34;$$

folglich $y = 16$ Mark von dem 10löthigen Silber.

Aus IV. $x = 8$ Mark von dem 15löthigen, und aus V. $z = 10$ Mark von dem 9löthigen Silber.

180ste Aufgabe.

Jemand bezahlt eine Summe von 67 rthlr. 6 gr. mit 5 Dukaten, 7 Frd'or und 2 Carolinen; eine Summe von 113 rthlr. 14 gr. mit 4 Dukaten, 9 Frd'or und 8 Carolinen; ferner eine Summe von 96 rthlr. mit 12 Dukaten, 6 Frd'or und 4 Carolinen. Wie hoch wurden diese Goldstücke gerechnet, wenn sie bey allen Zahlungen denselben Cours halten?

Auflösung.

Es mögen x Dukaten, y Friedrichsd'or und z Carolinen gewesen seyn, so muß, laut der Aufgabe, seyn:

I. $5x + 7y + 2z = 67\frac{1}{4}$

II. $4x + 9y + 8z = 113\frac{7}{12}$

III. $12x + 6y + 4z = 96$ mit 2 divid. giebt

IV. $6x + 3y + 2z = 48$

I. weniger IV. giebt V. $4y - x = 19\frac{1}{4}$

4mal I. weniger II. giebt VI. $16x + 19y = 155\frac{5}{12}$

16mal V. giebt = VII. $64y - 16x = 308$.

VI. + VII. giebt $83y = 463\frac{5}{12}$;

folglich $y = 5\frac{7}{12}$ rthlr. = 5 rthlr. 14 gr.

V. giebt $x = 22\frac{1}{3} - 19\frac{1}{4} = 3$ rthlr. 2 gr.

Aus IV. folgt z = 6 rthlr. 9 gr.

181ste Aufgabe.

Man hat drey Magazine, deren jedes dreyerley Getraide enthält; nämlich Waizen, Roggen

und

und Gerste. Das erste Magazin enthält 8 Wispel Waizen, 3 Wispel Roggen und 5 Wispel Gerste; das zweyte 3 Wispel Waizen, 10 Wispel Roggen und 7 Wispel Gerste; das dritte 6 Wispel Waizen, 19 Wispel Roggen und 13 Wispel Gerste. Der Werth des ersten Magazins ist 734 rthlr., der Werth des zweyten 812 rthlr. und der Werth des dritten 1130 rthlr. Wie hoch wurde der Wispel von jeder Getraideart gerechnet?

Auflösung.

Ein Wispel Waizen koste x, der Roggen y und der Gerste z rthlr.

Der Aussage der Aufgabe gemäß muß nun seyn:

$$\text{I.}\quad 8x + 3y + 5z = 734$$
$$\text{II.}\quad 3x + 10y + 7z = 812$$
$$\text{III.}\quad 6x + 9y + 13z = 1130$$

$\frac{1}{2}$. (3mal I. weniger III) giebt

$$\text{IV.}\quad 9x + z = 536$$

10mal I. weniger 3mal II. giebt

$$\text{V.}\quad 29z + 71x = 4904$$

29mal IV. weniger V. giebt

$$x = 56 \text{ rthlr.}$$

IV. giebt $z = 32$ —

und II. giebt $y = 42$ —

182ste

182ste Aufgabe.

A, B und C kaufen Caffee, Zucker und Thee. A bezahlt 11 rthlr. 15 gr. für $7\frac{1}{2}$ ℔. Caffee, 3 ℔. Zucker und $2\frac{1}{4}$ ℔. Thee; B bezahlt 10 rthlr. 6 gr. für 9 ℔ Caffee, 7 ℔. Zucker und 3 ℔. Thee; C bezahlt 12 rthlr. 6 gr. für 2 ℔. Caffee, $5\frac{1}{2}$ ℔. Zucker und 4 ℔. Thee. Was kostet das Pfund von jedem?

Auflösung.

Das Pfund Caffee mag x gr., das Pfund Zucker y gr. und das Pfund Thee z gr. gekostet haben, so erhalten wir aus den Bedingungen der Aufgabe folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \tfrac{15}{2}x + 3y + \tfrac{9}{4}z = 279 \text{ gr.}$$
$$\text{II.} \quad 9x + 7y + 3z = 390 —$$
$$\text{III.} \quad 2x + \tfrac{11}{2}y + 4z = 294 —$$

II. weniger $\frac{4}{3}$mal I. giebt

$$\text{IV.} \quad 3y - x = 18$$

8mal II. weniger 6mal III. giebt

$$\text{V.} \quad 60x + 23y = 1356$$

6omal IV. + V. giebt $y = 12$ gr. $= \frac{3}{2}$ rthlr.

IV. giebt $x = 18$ gr. $= \frac{3}{4}$ rthlr.

III. giebt $z = 48$ gr. $= 2$ —

183ste Aufgabe.

Jemand hat drey Stücke Metall, davon jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht. Das erste Stück enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber

ber und 30 Loth Kupfer; das zweyte enthält 20 Loth Gold, 28 Loth Silber und 48 Loth Kupfer; das dritte enthält 12 Loth Gold, 39 Loth Silber und 24 Loth Kupfer. Nun will er von jedem dieser drey Stücke etwas hinwegnehmen und alles zu einer Masse schmelzen, um dadurch eine Komposition von 10 Loth Gold, 23 Loth Silber und 26 Loth Kupfer hervorzubringen. Wie viel muß er von jedem Stücke dazu nehmen?

Auflösung.

Vom ersten Stücke muß man x Loth
Vom zweyten = = y = } nehmen.
Vom dritten = = z =

Das erste Stück wiegt $5 + 15 + 30 = 50$ Loth
Das zweyte = $20 + 28 + 48 = 96$ —
Das dritte = $12 + 39 + 24 = 75$ —

Wie viel nun in x Loth Mischung Gold enthalten ist, findet sich durch folgende Proportion:

$$50 : 5 = x : \tfrac{x}{10} \text{ Loth Gold.}$$

Auf diese Art finden wir, daß in

Loth Mischung	enthalten ist an Gold,	an Silber,	an Kupfer
x	$\frac{x}{10}$ Loth	$\frac{3x}{10}$ Loth	$\frac{3x}{5}$ Loth
y	$\frac{5y}{24}$	$\frac{7y}{24}$	$\frac{y}{2}$
z	$\frac{4z}{25}$	$\frac{13}{25}z$	$\frac{8}{25}z$

Demnach geben die Bedingungen der Aufgabe folgende Gleichungen:

I.

I. $\frac{x}{10} + \frac{5y}{24} + \frac{4z}{25} = 1$

II. $\frac{3x}{10} + \frac{7y}{24} + \frac{13z}{25} = 2$

III. $\frac{3}{5}x + \frac{y}{2} + \frac{8z}{25} = 26$

III. weniger 2mal I. giebt

IV. $\frac{4x}{10} + \frac{y}{12} = 6$

(13mal I. weniger 4mal II.) . 4 weniger . giebt

$y = 12 : \frac{1}{7}\frac{4}{5} = 12 \cdot 2 = 24$ Loth Ger.

IV. giebt $x = (6 - \frac{24}{12}) \cdot \frac{10}{4} = 10$ Lo Gold.

I. giebt $z = (10 - \frac{10}{10} - \frac{5}{24}) \cdot \frac{25}{4} = 25$ Kupfer.

184ste Aufgabe.

Drey Soldaten A, B und C, erbeuteten bey einem Gefechte zusammen 96 rthlr., welche sie, wegen gleichen Antheil an der Gefahr, auch gleich unter sich vertheilen wollen. Zu dem Ende giebt A, dem das meiste in die Hände gefallen war, so viel an B und C, als jeder von ihnen schon hat; auf die nämliche Art theilt hierauf B mit A und C und hernach C mit A und B. Wenn nun auf die Art die beabsichtigte Theilung wirklich beerkstelligt worden ist: wie viel mußte jeder Soldat erbeutet haben?

Erste Auflösung.

	A	B	C
Anfänglich hat	x	y	zrthlr.

Nach der 1sten Theilung hat

$x-y-z$, $2y$, $2z$

Nach der 2ten Theilung hat

$2x-2y-2z$, $3y-x-z$, $4z$

Nach der 3ten Theilung hat

$4x-4y-4z$, $6y-2x-2z$, $7z-x-y$.

Nun soll, nach der Aufgabe, am Ende der Mittheilung ein jeder gleich viel von den erbeuteten 96 rthlr. haben; es hat demnach ein jeder $\frac{96}{3} = 32$ rthlr.

Hieraus folgt:

$4\,(x-y-z) = 32$ rthlr.

also I. $x-y-z = 8$ rthlr.; so viel hat also A nach der ersten Mittheilung gehabt.

dazu $x+y+z = 96$ addirt

giebt $2x = 104$

folglich $x = 52$ rthlr.

Eben so ist $6y-2x-2z = 32$

also $3y-x-z = 16$

da nun nach I. $x-y-z = 8$ } addirt

so ist $2y-2z = 24$

also II. $y-z = 12$

Nun hatten wir III. $y+z = x-8 = 44$ (I.)

Demnach aus II. und III $y = 22+6 = 28$ rthlr.

und $z = 22-6 = 16$ rthlr.

Zweyte Auflösung.

Wird, wie in der ersten Auflösung, die Beute des A mit x bezeichnet, so beträgt die Beute des B und C $96 - x$. Nun giebt A dem B und C so viel, wie sie besitzen; er behält demnach $x - (yb - x) = 2x - 9b$ übrig. Dieser Rest wird ihm durch B und C vervierfacht; er hat also am Ende der Mittheilung $8(x-48)$; und dieses ist, nach der Aufgabe, $= 32$, woraus $x = 52$.

B besitzt nach der ersten Mittheilung $2y$, mithin besitzt A und C zusammen $96 - 2y$. Es bleibt also dem B nach der Mittheilung an A und C übrig $2y - (96 - 2y) = 4y - 9b$. Dieser Rest wird ihm durch C verdoppelt, wir haben also wieder $2(4y - 9b) = 32$ und daraus $y = 28$. Endlich $z = 96 - (52 + 28) = 16$.

Arithmetische Auflösung.

Die Soldaten	=	= A,	B, C,
hatten zuletzt	=	= 32,	32, 32,
Nach der 2ten Theilung haben sie also		16,	16, 64,
Nach der 1sten Theilung haben sie daher		8,	56, 32,
folglich haben sie gehabt		52,	28, 16.

185ste Aufgabe.

In den drey Fächern meiner Spinde befindet sich insgesammt eine Summe von 162 rthlr, die sehr ungleich vertheilt waren. Um in allen Fächern eine gleiche Summe zu bekommen, nehme ich aus dem ersten Fache so viel als nöthig ist, und lege in jedes der beyden andern die Hälfte von dem, was schon darin enthalten ist.

Hier-

Hierauf nehme ich aus dem zweyten und hernach auch aus dem dritten, und lege den beyden andern jedes Mal die Hälfte von dem zu, was sie schon enthalten. Wenn ich nun hierdurch wirklich meinen Zweck erreicht hätte, wie viel müßte anfangs in jedem Fache gewesen seyn?

Auflösung.

	1stes Fach.	2tes Fach.	3tes Fach.
Anfangs ist darin gewesen	x	y	z rthlr.
Nach der 1sten Vertheilung war	$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$;	$\frac{3y}{2}$;	$\frac{3z}{2}$
Nach der 2ten Vertheilung war	$\frac{3}{2}x - \frac{3y}{4} - \frac{3z}{4}$;	$\frac{7y}{4} - \frac{x}{2} - \frac{z}{2}$;	$\frac{9}{4}z$
Nach der 3ten Vertheilung war	$\frac{9x}{4} - \frac{9y}{8} - \frac{9z}{8}$;	$\frac{21y}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{3z}{4}$;	$\frac{23z}{8} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$

Laut der Aufgabe muß seyn:

$$\frac{9x}{4} - \frac{9y}{8} - \frac{9z}{8} = \frac{162}{3} = 54$$

also $\frac{x}{4} - \frac{y}{8} - \frac{z}{8} = 6$

$$2x - y - z = 48$$

daraus $x + y + z = 162$

$3x = 210$

folglich $x = 70$ rthlr.

Eben so muß auch der Aufgabe gemäß seyn

$$\frac{21y}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{3z}{4} = 54$$

$$\frac{7y}{8} - \frac{x}{4} - \frac{z}{4} = 18$$

$$7y - 2x - 2z = 144$$

2. I. giebt $2x + 2y + 2z = 324$

$9y = 468$

folgl. $y = 52$ rthlr.

demnach $z = 162 - (70 + 52) = 40$ rthlr.

186ste

186ste Aufgabe.

A, B und C spielen Pharo. Im ersten Spiele hatte A die Bank, B und C setzten den dritten Theil ihres Geldes und gewannen. Im zweyten Spiele hielt B die Bank, A und C setzten den dritten Theil ihres Geldes, und gewannen ebenfalls. Nun aber nimmt C die Bank, A und B setzten wieder den dritten Theil ihres Geldes und auch hier verlor der Banquier. Nach dem dritten Spiele zählen sie ihr Geld und finden, daß sie alle gleich viel haben; nämlich jeder 64 Dukaten. Wie viel mußten sie vor dem Spiele gehabt haben?

Auflösung.

	A	B	C
Vor dem Spiele hat	x	y	z Duk.
Nach dem 1sten Spiele hat	$x - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}$;	$\frac{4y}{3}$;	$\frac{4}{3}z$
Nach dem 2ten Spiele hat	$\frac{4x}{3} - \frac{4y}{9} - \frac{4z}{9}$;	$\frac{13}{9}\cdot y - \frac{x}{3} - \frac{z}{3}$;	$\frac{16z}{9}$
Nach dem 3ten Spiele hat	$\frac{16x}{9} - \frac{16y}{27} - \frac{16z}{27}$;	$\frac{52y}{27} - \frac{4x}{9} - \frac{4z}{9}$;	$\frac{55z}{27} - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}$

Was jeder zuletzt hatte, betrug 64 Dukaten; demnach haben wir folgende drey Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{16x}{9} - \frac{16y}{27} - \frac{16z}{27} = 64$$

$$\text{II.} \quad \frac{52y}{27} - \frac{4x}{9} - \frac{4z}{9} = 64$$

$$\text{III.} \quad \frac{55z}{27} - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 64$$

I. mit $\frac{27}{16}$ multiplizirt, giebt

$3x - y - z = 108$; laut der Aufgabe ist

IV. $x + y + z = 3 \cdot 64 = 192$ addirt,

giebt $4x = 300$

folglich $x = 75$ rthlr.

ferner

II. mit $\frac{27}{4}$ multiplizirt, giebt

$13y - 3x - 3z = 432$

3. IV. ist $3x + 3y + 3z = 576$ } addirt

$16y = 1008$

folglich $y = 63$

Demnach $z = 192 - (75 + 63) = 54$.

Zweyte Auflösung durch bloßes Raisonnement.

Die Herren	A	B	C
hatten jetzt	64	64	64

Da C jedem $\frac{1}{3}$ von dem, was er vorher hatte, gegeben hat, so besitzt jetzt jeder $\frac{4}{3}$ von dem, was er vorher hatte; mithin müssen sie gehabt haben:

A	B	C
48	48	96

Jetzt theilt B an A und C aus und giebt einem jeden $\frac{1}{3}$ von dem, was er vorher hatte. Demnach hat A sowohl als C jetzt $\frac{4}{3}$ von dem, was sie kurz vorher hatten. Sie müssen also gehabt haben:

A	B	C
36	84	72

Nun hatte wieder A von jedem der beyden andern $\frac{1}{3}$ von dem, was sie vorher gegeben hatten, und daher muß jeder vorher gehabt haben:

A	B	C
75	63	54.

187ste Aufgabe.

Unter drey Regimenter sollen, zur Belohnung ihrer Tapferkeit, 2652 rthlr. dergestalt vertheilt werden, daß von dem Regimente, welches sich am meisten auszeichnete, jeder Mann 1 rthlr. erhalten, und der Rest unter die Mannschaft der zwey übrigen Regimenter gleich getheilt werden soll. Wird nun dieser Thaler dem ersten Regimente zuerkannt, so erhält jeder Mann der zwey übrigen Regimenter $\frac{1}{2}$ rthlr. Giebt man diesen Thaler dem zweyten Regimente, so erhält jeder Mann der zwey übrigen $\frac{1}{3}$ rthlr; fällt endlich dieser Thaler dem dritten Regimente zu, so bekommt jeder Mann der zwey übrigen Regimenter gar nur $\frac{1}{4}$ rthlr.; Wie stark war jedes dieser drey Regimenter?

Auflösung.

	1ste Regim.	2te Reg.	3te Reg.
habe gehabt	x	y	z Mann.

So liefert die Aufgabe folgende drey Gleichungen:

$$\text{I.}\quad x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 2652$$
$$\text{II.}\quad \tfrac{1}{3}x + y + \tfrac{1}{3}z = 2652$$
$$\text{III.}\quad \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y + z = 2652$$

I. weniger $\frac{1}{2}$. II. giebt

$$\text{IV.}\quad \tfrac{5x}{6} + \tfrac{z}{3} = 1326$$

5 . (III. − $\frac{1}{4}$. II.) giebt

$$\text{V.}\quad \tfrac{5x}{6} + \tfrac{55z}{12} = 1989 . 5$$

V. − IV. giebt

$$z = \frac{1989 \cdot 20\frac{x}{17} - 1326 \cdot 4}{}$$
$$= 117 \cdot 20 - 78 \cdot 4$$
$$= 2340 - 312 = 2028 \text{ Mann.}$$

V. giebt $x = (1989 - 1859) \cdot 6$
$= 130 \cdot 6 = 780$ Mann.

II. giebt $y = 2652 - \frac{2808}{3}$
$= 2652 - 936$
$= 1716$ Mann.

188ste Aufgabe.

Es giebt 3 Zahlen, deren Summe 83 ist; wird von der ersten und zweyten 7 abgezogen, so verhalten sich die Reste wie 5 zu 3; wird hingegen von der zweyten und dritten 3 abgezogen, so verhalten sich die Reste wie 11 : 9. Welche Zahlen sind es?

Auflösung.

Die gesuchten 3 Zahlen seyen x, y und z.

Nach der Aufgabe ist:

I. $z = 83 - x - y$, und da

$x - 7 : y - 7 = 5 : 3$, so ist

II. $5y - 3x = 14$;

da ferner

$y - 3 : z - 3 = 11 : 9$, so ist

III $9y = 11z - 6$.

In III. den Werth von z aus I. gesetzt, giebt:

IV.

IV. $20y + 11x = 907$.

IV. weniger 4mal II., giebt

$x = 37$

II. giebt $y = 25$

und I. giebt $z = 21$.

189ste Aufgabe.

Es werden 3 Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht. Addirt man 6 zur ersten und zweyten, so verhalten sich die Summen wie 2 zu 3; addirt man 5 zur ersten und dritten, so verhalten sich die Summen wie 7 zu 11; subtrahirt man aber 36 von der zweyten und dritten, so verhalten sich die Reste wie 6 zu 7. Welche Zahlen sind es?

Auflösung.

Die gesuchten drey Zahlen seyen x, y und z, so folgt aus den Bedingungen der Aufgabe, daß

$(x + 6) : (y + 6) = 2 : 3$; also

I. $2y - 3x = 6$, auch soll seyn

$(x + 5) : (z + 5) = 7 : 11$, daher

II. $7z - 11x = 20$; ferner ist

$(y - 36) : (z - 36) = 6 : 7$, mithin

III. $7y - 6z = 36$

$\frac{2 \cdot \text{III.} - 7 \cdot \text{I.}}{3}$ giebt

IV. $7x - 4z = 10$

$\frac{4 \cdot II. + 7 \cdot IV.}{5}$ giebt

$x = 30$

Aus I. folgt $y = 48$

und IV. giebt $z = 50$.

190ste Aufgabe.

Eine gewisse Zahl wird mit drey Ziffern nach unserm dekadischen System geschrieben, die in arithmetischer Proportion stehen. Wird diese Zahl mit der Summe ihrer Ziffern an sich (d h., ohne auf den Werth zu sehen, welchen sie durch ihre Stelle erhalten), dividirt, so ist der Quotient 48; zieht man aber von dieser Zahl 198 ab, so erhält man eine Zahl, welche die nämlichen Ziffern als die gesuchte, aber in umgekehrter Ordnung enthält. Welche Zahl ist es?

Auflösung.

Es sey x die Ziffer der Einer,

y die Ziffer der Zehner

und z die Ziffer der Hunderte; so ist die gesuchte Zahl $100z + 10y + x$. Die Ziffern in umgekehrter Ordnung geschrieben, geben die Zahl $100x + 10y + z$.

Aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben sich folgende Gleichungen:

I. $\frac{100z + 10y + x}{z + y + z} = 48.$

II.

II. $100z + 10y + x - 198 = 100x + 10y + z$;

da überdem seyn soll:

$x - y = y - z$, so ist

III. $z = 2y - x$. Diesen Werth von z in I. und II. gesetzt, giebt

IV. $z = \frac{3x}{2}$ (aus I.)

und V. $y = x + 1$ (aus II.)

demnach

$$\frac{3}{2}x = x + 1$$

folgl. $x = 2$

aus V. folgt $y = 3$

und aus III. folgt $z = 4$.

191te Aufgabe.

Die Nummer eines Klassen-Lotterie-Loses besteht aus drey Ziffern. Diese Ziffern geben addirt 20. Zieht man die Ziffer der Zehner von der Ziffer der Einer und den daraus entstehenden Rest von der Ziffer der Hunderte ab, so bleibt 6. Wird aber die Ziffer der Zehner von der Ziffer der Hunderte und der Rest von der Ziffer der Einer abgezogen, so bleibt 2. Welches ist die Nummer?

Auflösung.

Es seyen die Ziffern der Einer = x

" " " Zehner = y

" " " Hunderte = z

laut der Aufgabe haben wir nun:

I.

I. $z + y + x = 20$
II. $z - (x - y) = 6$ } I. – II. subtrahirt, giebt

III. $x - (z - y) = 2$ $\begin{cases} 2x = 14, \text{ also} \\ x = 7 \end{cases}$

II. und III. addirt, geben $2y = 8$

also $y = 4$.

Diese Werthe von x und y in II. substituirt, geben

$z - 3 = 6$;

$z = 9$.

Endlich die Lotterie-Nummer 947.

192ste Aufgabe.

Man soll drey Zahlen errathen, von denen folgendes angegeben wird:

Die erste um den dritten Theil der Summe der beyden andern vermehrt, giebt 44.

Die zweyte um den vierten Theil der Summe der beyden andern vermehrt, giebt 36.

Die dritte um den sechsten Theil der Summe der beyden andern vermehrt, giebt 27.

Auflösung.

Es sey x die erste, y die zweyte und z die dritte Zahl, so haben wir folgende Gleichungen:

$$\text{I. } x + \frac{y+z}{3} = 44$$

$$\text{II. } y + \frac{x+z}{4} = 36$$

$$\text{III. } z + \frac{x+y}{6} = 27;$$

also IV. $3x + y + z = 132$
V. $4y + x + z = 144$
VI. $6z + x + y = 162$

3mal V. giebt $12y + 3x + 3z = 432$
davon IV. $3x + y + z = 132$

VII. $11y + 2z = 300$

VI. weniger V. giebt VIII. $5z - 3y = 18$

5mal VII. giebt $55y + 10z = 1500$
2mal VIII. giebt $10z - 6y = 36$ } subtrahirt

$61y = 1464$
folglich $y = 24.$

Aus VIII. folgt $z = \frac{18 + 3 \cdot 24}{5} = 18.$

Endlich giebt I.

$$x = 44 - \frac{24 + 18}{3} = 44 - 14 = 30.$$

Aufgaben mit vier und mehrern unbekannten Größen.

193ste Aufgabe.

Das Vermögen von drey Personen A, B und C ist folgendermaßen beschaffen:

Die Summe des Vermögens
von A und des doppelten
der Summe des Vermögens
von = = = = B und C ist = a

Die

Die Summe des Vermögens
von B und des dreyfachen
der Summe des Vermögens
von : : : : A und C ist = b.

Die Summe des Vermögens
von C und des vierfachen
der Summe des Vermögens
von : : : , A und B ist = c.

Wie viel hat jede?

Auflösung.

Man bezeichne das gesuchte Vermögen von A, B und C mit x, y und z. Es könnte nun die Aufgabe wie die vorhergehenden von drey unbekannten Größen aufgelöst werden. Es ist aber besser, noch eine neue unbekannte Größe zu Hülfe zu nehmen; nämlich die Summe des Vermögens der drey Personen.

Es sey daher $x + y + z = s$.

$$\text{Bed.} \begin{cases} x + 2(s - x) = a \\ y + 3(s - y) = b \\ z + 4(s - z) = c \end{cases}$$

$$\text{Red.} \begin{cases} 2s - x = a \\ 3s - 2y = b \\ 4s - 3z = c \end{cases}$$

Macht man die Coëffizienten von x, y und z gleich, so erhält man:

$$12s - 6x = 6a$$
$$9s - 6y = 3b$$
$$8s - 6z = 2c$$

Hieraus

Hieraus $29s - 6s = 6a + 3b + 2c$

$23s = 6a + 3b + 2c$

$s = \frac{6a + 3b + 2c}{23}$

$x = 2s - a = \frac{-11a + 6b + 4c}{23}$

$y = \frac{3s - b}{2} = \frac{9a + 7b + 3c}{23}$

$z = \frac{4s - c}{3} = \frac{8a + 4b - 5c}{23}$

194ste Aufgabe.

Das Vermögen von drey Personen wird angegeben wie folget:

Die Summe des Vermögens von A und das mfache der Summe des Vermögens von ; ; ; ; B und C ist = p;

Die Summe des Vermögens von B und das nfache der Summe des Vermögens von ; ; ; ; A und C ist = q;

Die Summe des Vermögens von C und das lfache der Summe des Vermögens von ; ; ; ; A und B ist = r.

Wie viel hat jede Person?

Auflö-

Auflösung.

x, y, z und s sollen hier die nämliche Bedeutung haben, wie bey der vorhergehenden Aufgabe. Man hat also folgende drey Gleichungen:

$$x + m(s - x) = p$$
$$y + n(s - y) = q$$
$$z + l(s - z) = r$$

oder $ms - (m - 1)x = p$
$ns - (n - 1)y = q$
$ls - (l - 1)z = r.$

Man mache die Coëffizienten von x, y, z einandergleich; indem man die Glieder der ersten Gleichung mit $(n-1)(l-1)$; die der zweyten mit $(m-1)(l-1)$, und die der dritten mit $(m-1)(n-1)$ multiplizirt; so giebt die Summe dieser drey Gleichungen:

$$s\left\{\begin{matrix} m(n-1)(l-1) \\ +n(m-1)(l-1)-(m-1)(n-1)(l-1) \\ +l(m-1)(n-1) \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} p(n-1)(l-1) \\ +q(m-1)(l-1) \\ +r(m-1)(n-1) \end{matrix}$$

und daraus:

$$s = \frac{p(n-1)(l-1)+q(m-1)(l-1)+r(m-1)(n-1)}{2mnl-(mn+ml+nl)+1}$$

und so ergiebt sich

$$x = \frac{ms-p}{m-1};\quad y = \frac{ns-q}{n-1};\quad z = \frac{ls-r}{l-1}$$

In der vorhergehenden Aufgabe war $m = 2$; $n = 3$ und $l = 4$. Diese Werthe in der hier gefundenen Formel für s substituirt, giebt s, wie vorhin.

195ste Aufgabe.

Vier Personen haben a rthlr. gewonnen. Wenn A seinen Gewinn mit m, B seinen mit n, C mit p und D mit q multiplizirt, so kommt allemal ein gleiches Produkt. Wie stark ist eines jeden Gewinn gewesen?

Auflösung.

Ist x der Gewinn des A, y der des B, z der des C, w der des D; so ist nach der Aufgabe:

$$\text{I.} \quad mx = ny = pz = qw$$

$$\text{III.} \quad x + y + z + w = a$$

Aus I. folgt $x = \frac{q \cdot w}{m}$

$$y = \frac{q \cdot w}{n}$$

$$z = \frac{q \cdot w}{p}$$

Diese Werthe in II. gesetzt, giebt

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) q \cdot w + w = a$$

und wenn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = R$ gesetzt wird,

so ist $(R \cdot q + 1) \cdot w = a$

$$\text{folglich} \quad w = \frac{a}{Rq + 1}$$

$$\text{also} \quad x = \frac{q}{m} \cdot \frac{a}{Rq + 1}$$

$$y = \frac{q}{n} \cdot \frac{a}{Rq + 1}$$

z =

$$z = \frac{q}{p} \cdot \frac{a}{R\,q + 1}$$

Z. B. Es sey $a = 1710$; $m = 3$; $n = 4$; $p = 5$ und $q = 6$;
so ist $R = \frac{47}{60}$; $R\,q + 1 = 5, 7$; daher $w = \frac{1710}{5,7}$
$= \frac{57000}{190} = 300$; demnach $x = \frac{6}{3} \cdot 300 = 600$,
$y = \frac{6}{4} \cdot 300 = 450$
und $z = \frac{6}{5} \cdot 300 = 360$.

196ste Aufgabe.

Vier Personen haben in Summa gewonnen 1090 rthlr. Beym Nachzählen eines jeden Theils findet sich folgendes Verhältniß: Wenn A seinen Theil durch 3, B durch 4, C durch 5 und D durch 6 dividirt, so kommt allezeit ein gleicher Quotient. Wie viel hat nun jede Person gewonnen?

Auflösung.

A habe gewonnen x
B = = y
C = = z
D = = w;

so ist nach der Aufgabe:

I. $x + y + z + w = 1090$
II. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{w}{6}$

folglich $20x = 15y = 12z = 10w$,

wodurch diese Aufgabe auf die nächstvorhergehende zurückgeführt wird; und es ist $a = 1090$; $m = 20$; $n = 15$; $p = 12$ und $q = 10$;

also $R = \frac{1}{10}$ und $Rq + 1 = 2$; daher

$w = 545$

$x = \frac{10}{20} \cdot 545 = 272\frac{1}{2}$

$y = \frac{10}{15} \cdot 545 = 363\frac{1}{3}$

$z = \frac{10}{12} \cdot 545 = 454\frac{1}{6}$.

197ste Aufgabe.

Ich habe eine Blume, deren Name aus 4 Buchstaben besteht. Addirt man die Stellen des Alphabets, worin sie sich befinden, so kommen 54. Die Stellen der beyden ersten addirt, geben 31, die Stellen des erstern und des dritten 35, die Summen der Stellen des erstern und des letztern 22. Wie heißt die Blume?

Auflösung.

Die unbekannten Buchstaben mögen der Ordnung nach x, y, z und w seyn, so ist nach der Aufgabe:

I. $x + y + z + w = 54$

II $x + y = 31$

III $x + z = 35$

IV. $x + w = 22$.

Daraus finden wir, daß

$x = 17$
$y = 14$
$z = 18$
$w = 5$

} te Buchstabe des Alphabets, und demnach der Name der Blume Rose ist.

198ste

198ste Aufgabe.

Der Name einer Stadt besteht aus 5 Buchstaben. Addirt man die Stellen des Alphabets, worin die vier erstern stehen, und zieht die Stelle der fünften davon ab, so kommen 24; zieht man die Stelle der vierten von der Summe der Stellen der vier übrigen ab, so kommen 42; eben so giebt die Stelle der dritten, von den übrigen abgezogen, 26; die Stelle der zweyten von den übrigen, 58; endlich die Stelle der ersten von der Stelle der übrigen, 30. Wie heißt die Stadt?

Auflösung.

Der Ordnung nach seyen die Buchstaben

x, y, z, v, w;

so ist nach der Aufgabe:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I.} & x + y + z + v - w = 24 \\ \text{II.} & x + y + z + w - v = 42 \\ \text{III.} & x + y + v + w - z = 26 \\ \text{IV.} & x + z + v + w - y = 58 \\ \text{V.} & y + z + v + w - x = 30 \end{array}\right\} \text{addirt,}$$

giebt $3\,(x + y + z + v + w) = 180$

also

$$\text{VI.} \quad x + y + z + v + w = 60$$

Zieht man von VI. nach und nach V, IV, III, II, I. ab, so kommt

$x =$

$x = 15$
$y = 1$
$z = 17$ } te Buchstabe im Alphabet.
$v = 9$
$w = 18$

Daher der Name der Stadt Paris.

199ste Aufgabe.

Es werden 4 Zahlen, u, x, y und z gesucht, welche folgenden Bedingungen entsprechen:

1. $u + x + y = z + a$
2. $u + x + z = y + b$
3. $u + y + z = x + c$
4. $x + y + z = u + d$.

Auflösung.

Von der Summe dieser vier Gleichungen ziehe man $u + x + y + z$ ab und dividire durch 2, so erhält man $u + x + y + z = \frac{a + b + c + d}{2} = s$.

Zieht man von dieser letzten Gleichung nach einander die gegebenen Gleichungen ab, so erhält man aus diesen Differenzen

$$u = \frac{s - d}{2} = \frac{a + b + c - d}{4}$$

$$x = \frac{s - c}{2} = \frac{a + b + d - c}{4}$$

$$y = \frac{s - b}{2} = \frac{a + c + d - b}{4}$$

$$z = \frac{s - a}{2} = \frac{b + c + d - a}{4}$$

Beys

Beyspiel.

			finden wir
Für	a	= 50	u = 25
"	b	= 40	x = 20
"	c	= 30	y = 15
"	d	= 20	z = 10.

200ste Aufgabe.

Drey Arbeiter, A, B, C, verdienen bey einerley einträglicher Arbeit, nach folgenden Angaben:

A und B	zusammen	20	rthlr.	in	6 Tagen.
A und C	"	27	–	"	9 –
B und C	"	40	–	"	15 –

Wie viel hat jeder Arbeiter täglich verdient?

Auflösung.

Den täglichen Verdienst von A, B und C bezeichne man mit x, y und z; so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad 6(x + y) = 20$$
$$\text{II.} \quad 9(x + z) = 27$$
$$\text{III.} \quad 15(y + z) = 40;$$

also
$$x + y = 3\tfrac{1}{3}$$
$$x + z = 3$$
$$y + z = 2\tfrac{2}{3}$$

addirt und halbirt

giebt $x + y + z = 4\tfrac{1}{2}$.

Von dieser Summe jede der addirten Gleichung abgezogen, giebt:

$x = 1\tfrac{5}{6}$ rthlr.; $y = 1\tfrac{2}{3}$ rthlr.; $z = \tfrac{1}{6}$ rthlr.

201ste Aufgabe.

Es sey gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{3} + \tfrac{z}{4} &= a \\ \tfrac{x}{3} + \tfrac{y}{4} + \tfrac{z}{5} &= b \\ \tfrac{x}{4} + \tfrac{y}{5} + \tfrac{z}{6} &= c \end{aligned}\right\}$$ Daraus x, y und z zu bestimmen.

Auflösung.

Bringt man in den gegebenen Gleichungen die Brüche weg, so erhält man:

$$\text{I.} \quad 6x + 4y + 3z = 12a$$
$$\text{II.} \quad 20x + 15y + 12z = 60b$$
$$\text{III.} \quad 15x + 12y + 10z = 60c.$$

I. – II. giebt $4x + y = 48a - 60b$ (IV.)

II. – III. giebt $5x + 3y + 2z = 60b - 60c$ (V.)

I. – V. giebt $x + y + z = 12a - 60b + 60c$ (VI.)

V. – 2. VI giebt $3x + y = 180b - 24a - 180c$ (VII.)

IV. – VII. giebt $x = 32a + 180c - 240b$

$$= 12(6a + 15c - 20b)$$

Aus VII. folgt $y = 12(15b - 2a - 15c) - 3x$

und VI. giebt $z = 12(a - 5b + 5c) - (x + y)$

Z. B. es sey $a = 62$, $b = 47$, $c = 38$, so finden wir $x = 24$; $y = 60$ und $z = 120$.

202te Aufgabe.

Es seyen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \text{I.} \quad & x + y + z = a \\ \text{II.} \quad & 2x + b = 3y + c \\ \text{III.} \quad & 2x + b = 4z + d \end{aligned}\right\}$$ Daraus x, y und z zu finden.

Auflösung.

12 . I. + 4 . II. + 3 . III. geben:

$$26x + 12y + 12z + 7b = 12a + 12y + 12z + 4c + 3d$$

und folglich

$$x = \frac{12a + 4c + 3d - 7b}{26}$$

$$y = \frac{2a + b - c}{3} \text{ und } z = a - x - y$$

Z. B. Es sey $a = 90$; $b = 40$; $c = 20$; $d = 10$;

so ist $x = 35$; $y = 30$; und $z = 25$.

203te Aufgabe.

x, y und z aus den folgenden drey Gleichungen zu finden.

$$x - \frac{4y + 4z}{7} = a$$

$$y - \frac{3x + 3z}{8} = a$$

$$z - \frac{2x + 2y}{9} = a.$$

Auflösung.

Aus den gegebenen Gleichungen fließen folgende drey:

I. $7x - 4y - 4z = 7a$

II. $8y - 3x - 3z = 8a$

III. $9z - 2x - 2y = 9a$

2 . I. + II. giebt $11x - 11z = 22a$ (IV.)
und 4 . III. + II giebt $-11x + 33z = 44a$. (V.)
IV. + V. giebt $22z = 66a$;
folglich $z = 3a$
Aus IV. $x = 2a + z$
Aus II. $y = a - \frac{3}{8}(x + z)$

Z. B. Es sey $a = 30$; so ist $z = 90$; $x = 150$ und $y = 120$.

203te Aufgabe.

Ein Lehrer legte seinen 6 Schülern eine Summe von 384 Pfennigen vor, wovon ein jeder nach Belieben nehmen sollte; da aber die Theilung sehr ungleich ausfällt, so verlangt der Lehrer, daß der Größte, welcher die meisten genommen, jedem andern so viel abgeben soll, als er bekommen. Darauf sollte der, welcher hiedurch das Meiste erhalten, auf gleiche Art dem andern abgeben. Nachdem alle sechs dieses Verlangen erfüllt, so findet sich, daß die Pfennige gleich getheilt sind. Wie viel Pfennige hat jeder anfangs gegriffen, und wie viel hat er hernach behalten?

Auflösung.

Wenn man die unbekannten Größen mit u, v, w, x, y, z bezeichnet, und so verfährt, wie Aufg. 184, so erhält man folgende Gleichungen:

I. $32u - 32(v + w + x + y + z) = 64$
II. $48v - 16(u + w + x + y + z) = 64$

III. $56w - 8(u + v + x + y + z) = 64$
IV. $60x - 4(u + v + w + y + z) = 64$
V. $62y - 2(u + v + w + x + z) = 64$
VI. $63z - (u + v + w + x + y) = 64.$

Ich überlasse es dem Anfänger, aus diesen Gleichungen die Werthe von u, v, w, x, y und z, nach der in der 184sten Aufgabe gezeigten Methode auszumitteln. Ich will hier eine andere Auflösung geben, die uns einen Weg angeben wird, wie dergleichen Aufgaben auf dem kürzesten Weg aufzulösen sind; die Anzahl der unbekannten Größen mag noch so groß seyn.

Nachdem man jede der obigen Gleichungen mit dem vor der Klammer stehenden Faktor dividirt hat und dann die vorletzte von der letzten, die vorvorletzte von der vorletzten Gleichung u. s. w. abzieht, so geben diese Reste folgende Gleichungen:

$$y = 2z - 1 = 2(z - 1) + 1$$
$$x = 2y - 1 = 4(z - 1) + 1$$
$$w = 2x - 1 = 8(z - 1) + 1$$
$$v = 2w - 1 = 16(z - 1) + 1$$
$$u = 2v - 1 = 32(z - 1) + 1,$$

woraus folgt, daß von $z = (z - 1) + 1$ gefunden ist, daraus sofort sich alle übrigen nach einem sehr einfachen Gesetze berechnen lassen.

Um nun z zu bestimmen, so überlege man, daß nach unserer jetzigen Auflösung die Summe der unbekannten Größen gleich seyn muß der Summe von

$(z-1)+1$; $2(z-1)+1$; $4(z-1)+1$; $8(z-1)+1$;
$16(z-1)+1$; $32(z-1)+1$; also gleich
$63(z-1)+6.$

Diese

Diese Summe ist aber in der Aufgabe zu 384 angegeben; demnach haben wir:

$63 (z - 1) + 6 = 384 = 64 . 6$ 6 fuhr.

bleibt $63 (z - 1) = 63 . 6$ mit 63 dividirt

giebt $z - 1 = 6$

folglich $z = 6 + 1 = 7.$

Demnach $y = 2 . 7 - 1 = 13$

$x = 2 . 13 - 1 = 25$

$w = 2 . 25 - 1 = 49$

$v = 2 . 49 - 1 = 97$

$u = 2 . 97 - 1 = 193.$

Es sey ganz allgemein n die Anzahl der unbekannten Größen. n . A die nach der Vorschrift der Aufgabe zu vertheilende Zahl, so läuft die Auflösung darauf hinaus: die Summe von einer geometrischen Progression von n Glieder zu finden, deren erstes Glied $(z - 1) = z$ und deren letztes $z^{n} - 1 z$. Diese Summe ist nach der Theorie der Progressionen, die man hier als aus der Arithmetik bekannt annehmen kann,

$$= (2^{n} - 1) . z.$$

Da nun die eigentliche Reihe, die wir zu summiren haben, aus den um 1 vermehrten Gliedern der eben genannten geometrischen Reihe besteht, so haben wir die gefundene Summe noch um n Einheiten zu vermehren, und erhalten, laut den Bedingungen der Aufgabe, folgende Gleichung:

$$(2^{n} - 1) . Z + n = A . n$$

$$(2^{n} - 1) Z = (A - 1) n;$$

$$\text{folglich } Z = \frac{(A - 1) . n}{2^{n} - 1}$$

$$\text{oder } Z = \frac{(A-1)\cdot n}{2^n - 1} + 1$$

Sollen die unbekannten Größen ganze Zahlen werden, so muß $\frac{A-1}{n}$ eine ganze Zahl seyn; d. h. $\frac{A-1}{2^n-1}$

A – 1 muß ein Vielfaches von $2^n - 1$ seyn. Wäre q dieses Vielfache, so müßte seyn:

$A - 1 = q \cdot (2^n - 1)$; folglich $A = q\,(2^n - 1) + 1$.

Für $q = 1$ ergiebt sich hieraus $A = 2^n$

und also $Z = n + 1$.

D. h. Wenn die zu vertheilende Zahl $nA = n \cdot 2^n$ ein Vielfaches von einer Potenz von 2 ist, deren Exponent gleich der Anzahl der gesuchten Größen ist

In diesem letztern Falle ist alsdann die kleinste der gesuchten Größen $z = n + 1$, das heißt, um 1 größer, als die Anzahl der unbekannten Größen.

Ich habe mich bey dieser Auflösung deshalb verweilt, um der Algebra einen Vorwurf zu entziehen, daß sie dergleichen Aufgaben nicht so leicht auflösen könnte, als durch ein einfaches Raisonnement doch geschehen kann, wie solches bey der 184sten Aufgabe gezeigt worden.

Meine hier gegebene algebraische Auflösung ist eine Regel, wie man dergleichen Aufgaben auf dem kürzesten Wege auflösen kann.

204te Aufgabe.

A, B, C, D und E spielen mit einander, unter der Bedingung, daß derjenige, der verliert, allen

allen übrigen so viel geben muß, als sie schon haben. A spielt zuerst, dann B, dann C, dann D und endlich E. Alle verlieren nach der Reihe, und doch haben am Ende des fünften Spiels alle gleich viel, nämlich jeder 32 rthlr. Wie viel mußten sie vor dem Spiele gehabt haben?

Auflösung.

Zusammen haben alle 5 Spieler gehabt $5 \cdot 32 = 5 \cdot 2^5$.

Demnach ist nach der vorhergehenden Aufgabe hier $n = 5$ und $A = 25$; also

hat E gehabt		$5 + 1 = 6$
demnach muß D gehabt haben		$2.6 - 1 = 11$
	C " "	$2.11 - 1 = 21$
	B " "	$2.21 - 1 = 41$
	A " "	$2.41 - 1 = 81$.

Eine andere Auflösung von dergleichen Aufgaben findet man in Eulers Algebra, 2r Th. §. 54.

205te Aufgabe.

Das Vermögen u, v, w, x, y von 5 Personen sey durch folgende Bedingungen zu bestimmen:

$$u + \tfrac{1}{2}v = a$$
$$v + \tfrac{1}{3}w = b$$
$$w + \tfrac{1}{4}x = c$$
$$x + \tfrac{1}{5}y = d$$
$$+ = e$$

Auflö-

Auflösung.

So sind $2u + v = 2a$

$3v + w = 3b$

$4w + x = 4c$

$5x + y = 5d$

$+ y = 6e$

u

$$\left.\begin{array}{rl} 6u + 3v & = 6a \\ 3v + w & = 3b \\ \hline 6u - w & = 6a - 3b \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 24u - 4w & = 24a - 12b \\ 4w + x & = 4c \\ \hline 24u + x & = 24a - 12b + 4c \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rll} 24u & +x & = 24a - 12b + 4c \\ 120u & +5x & = 120a - 60b + 20c \\ & 5x + y & = 5d \\ \hline 120u & - y & = 120a - 60b + 20c - 5d \\ 720u & - 6y & = 720a - 360b + 120c - 30d \\ u & + 6y & = 6e \\ \hline 721u & & = 720a - 360b + 120c - 30d + 6e \\ u & & = 720a - 360b + 120c - 30d + 6e \end{array}$$

$$721$$

$$= 6 \cdot \frac{120a - 60b + 20c - 5d + e}{721}$$

$$v = 2(a - u) \qquad = 2 \cdot \frac{a + 360b - 120c + 30d - 6e}{721}$$

$$w = 3(b - v) \qquad = 3 \cdot \frac{-2a + b + 240c - 60d + 12e}{721}$$

$$x = 4(c - w) \qquad = 4 \cdot \frac{6a - 3b + c + 180d - 36e}{721}$$

$$y = 5(d - x) \qquad = 5 \cdot \frac{-24a + 12b - 4c + d + 144e}{721}.$$

Zum

Zum Schlusse will ich noch die allgemeine Auflösung der Gleichungen mit drey und mehreren unbekannten Größen vortragen.

206te Aufgabe.

Es seyen gegeben die 3 Gleichungen
$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ a'x + b'y + c'z = p' \\ a''x + b''y + c''z = p'' \end{cases}$$

Man soll daraus x, y und z bestimmen.

Auflösung.

Man drücke in zwey von diesen Gleichungen, z. B. in den beyden ersten, die Werthe von x und y durch die bekannten und noch übrigen unbekannten aus, so ergeben sich folgende zwey Gleichungen:

$$ax + by = p - cz$$
$$a'x + b'y = p' - c'z.$$

Aus diesen zwey Gleichungen erhält man nach der 150sten Aufgabe, 1. Anmerkung:

$$x = \frac{(p - cz)b' - (p' - c'z)b}{ab' - a'b} = \frac{pb' - p'b - z(cb' - c'b)}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{a(p' - c'z) - a'(p - cz)}{ab' - a'b} = \frac{ap' - a'p - z(ac' - a'c)}{ab' - a'b}.$$

Diese Werthe von x und y in der dritten Gleichung substituirt, geben die Gleichung

$$a'' \cdot \frac{pb' - p'b - z(cb' - c'b)}{ab' - a'b} + c''z = p''.$$
$$+ b'' \cdot \frac{ap' - a'p - z(ac' - a'c)}{ab' - a'b}$$

oder

oder

$$a''(pb'-p'b)-a''z(cb'-c'b)$$
$$+b''(ap'-a'p)-b''z(ac'-a'c)=p''(ab'-a'b).$$
$$+c''z(ab'-a'b)$$

daraus

$$z=\frac{ab'p''-ab''p'+a'b''p-a'bp''+a''bp'-a''b'p}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$y=\frac{ap'c''-ap''c'+a'p''c-a'pc''+a''pc'-a''p'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$x=\frac{pb'c''-pb''c'+pb''c-p'bc''+p''bc'-p''b'c}{ab'c''-ab''c'+ab''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}.$$

1. Anmerk. So verwickelt auch diese Formeln scheinen mögen, so macht doch ihre symmetrische Zusammensetzung die Uebersetzung leicht und unterstützt das Gedächtniß.

Der Nenner besteht nämlich aus 6 Produkte, jedes von 3 Faktoren, oder von drey Dimensionen, welches Coëffizienten von jeder der drey unbekannten Größen aus den drey Gleichungen sind. Drey dieser Produkte sind positiv, und drey sind negativ. Diese zwey Klassen von Produkten unterscheiden sich so: Man behalte in jedem dieser Produkte dieselbe Ordnung der Coëffizienten bey; diese Coëffizienten denke man sich, bezeichnet mit den Anzeigern (Indices) 0, 1, 2; diejenigen dieser Produkte, in welchen diese Anzeiger sich in jener Ordnung folgen, indem man beyderley mit einem von ihnen anfängt, sind positiv; und diejenigen, in welchen diese Ordnung gestört ist, sind negativ. Die Produkte also, in welchen die Anzeiger der Buchstaben a, b, c, folgende sind,

0, 1, 2,
1, 2, 0,
2, 0, 1, sind positiv; und die Produkte, in welchen

die

die Ordnung der Anzeiger von denselben Buchstaben folgende sind,
0, 2, 1,
1, 0, 2,
2, 1, 0, sind negativ.

Der Zähler entsteht aus dem Nenner, indem man in jedem Gliede, statt des Coëffizienten der gesuchten unbekannten, das zu derselben Gleichung gehörige ganz bekannte Glied setzt.

Diese Regel, in Betreff der Zeichen, leidet sowohl im Nenner, als im Zähler, die dem Zeichen der Faktoren zustimmenden Veränderungen.

2. Anmerk. Das oben gezeigte Verfahren, Gleichungen mit drey unbekannten Größen aufzulösen, scheint mir auf dem kürzesten Wege zu den gefundenen symmetrischen Formeln zu führen Andere Verfahrungsarten geben auch diese Formeln. Z E., statt die Frage auf eine einzige Gleichung von einer unbekannten zu bringen, so hätte man sie auf zwey Gleichungen, jede von zwey unbekannten, zurück führen können, indem man die Coëffizienten von einer der unbekannten den drey Gleichungen gleich macht.

$$ax + by + cz = p$$
Es sey also $a'x + b'y + c'z = p'$
$$a''x + b''y + c''z = p''.$$

Die erste Gleichung werde z. B. mit c', die zweyte mit c multiplizirt und z aus den zwey erhaltenen Gleichungen weggebracht. Eben so multiplizirt man die erste Gleichung mit c'' und die dritte mit c; und auch z aus den zwey so erhaltenen Gleichungen eliminirt: so ergeben sich zwey Gleichungen, von denen jede nur die unbekannten x und y enthält; nämlich:

$$x(ac' - a'c) + y(bc' - b'c) = pc' - p'c.$$
$$x(ac'' - a''c) + y(bc'' - b''c) = pc'' - p''c.$$

woraus

woraus

$$x = \frac{(pc' - pc')(bc'' - b''c) - (bc' - b'c)(pc'' - p''c}{(ac' - a'c)(bc'' - b''c) - (bc' - b'c)(ac'' - a''c}.$$

Es ist aber: $(ac' - a'c)(bc'' - b''c)$

$= abc'c'' - ab''cc' - a'bcc'' + a'b''cc$

und $(bc' - b'c)(ac'' - a''c)$

$= abc'c'' - ab'cc'' - a''bcc' + a''b'cc.$

Mithin $(ac' - a'c)(bc'' - b''c) - (bc' - b'c)(ac'' - a''c)$

$= c(ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c)$

Eben so $(pc' - p'c)(bc'' - b''c)(bc' - b'c)(pc'' - p''c)$

$= c(pb'c'' - pb''c' + p'b''c - p'bc'' + p''bc' - p''b'c)$

folglich $x = \frac{pb'c'' - pb''c' + p'b''c - p'bc'' + p''bc' - p''b'c}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' \quad a''b'c}.$

Das hier gezeigte Verfahren scheint die nicht auszuweichende Unbequemlichkeit zu heben, Größen einzuführen, die sich gegenseitig aufheben; nämlich zwey Produkte $abc'c''$; und Produkte von vier Dimensionen, die sich auf Produkte von drey Dimensionen nur durch Ausstoßung eines gemeinschaftlichen Faktors c reduziren, der unnütz in den beyden Gliedern des Bruchs, welche den Werth der unbekannten ausdrückt, eingeführt ist.

3. Anmerk. Es giebt noch andere Verfahrungsarten, um zu solchen Formeln zu gelangen; das erste Verfahren scheint mir aber das einfachste und regulärste zu seyn.

4. Anmerk. Da der Nenner von dem für jede unbekannte gefundenen Bruch aus Gliedern mit entgegengesetzten Zeichen besteht, so kann jede unbekannte unbestimmt oder unmöglich werden, wenn die Summe der Glieder mit dem einen Zeichen gleich der Summe der Glieder mit dem andern Zeichen sind. Der Werth von

einer

einer jeden der Unbekannten ändert ihr Zeichen, wenn die beyden Glieder des Bruchs verschiedene Zeichen haben. Wer alles Vorhergehende mit Aufmerksamkeit gelesen hat, der wird aus den bey weniger zusammengesetzten Fällen schon öfters gemachten Bemerkungen, leicht auch hier den wahren Sinn dieser Veränderungen verstehen, so daß mir die Aufzählung aller hier möglichen Fälle wohl erlassen werden kann.

5. Anmerk. Die Combinatorische Analysis bietet Mittel dar, für jede beliebige Anzahl von unbekannten Größen, wenn sie durch eben so viel Gleichungen vom ersten Grade gegeben sind, die Werthe der unbekannten sogleich ganz entwickelt auf dem kürzesten Wege darzustellen.

Ende des zweyten Theils.

Verbesserungen.

Seite 16. §. 27. fehlen im Zähler zwischen den Gliedern die Minuszeichen.

Ebendas. in der letzten Zeile lies mit acg dividirt.

Seite 17. Zeile 9, statt acdy lies 2cdy

— 18. letzte Zeile, statt ab lies $a+b$

— 24. Zeile 11, lies $\frac{a-c}{2} - \frac{a-b}{2}$

— 34. — 18, statt $b \pm$ lies $b \pm c$

— 36. — 19, lies 3) $b = \frac{a}{e}$

— 38. — 10, statt r muß lies muß

— 39. — 14, lies $d > \frac{1}{n} > \frac{r}{b}$

— 40. — 9, lies $\frac{a}{b}$ statt $\frac{a}{q}$

ebdf. — 13, l. $n + \frac{b}{a} = n + \frac{1}{e}$

— — 14, l. $\frac{na+b}{a}$.

— — 16, l. $\frac{ne+1}{e}$

— 42. §. 64. Z. 3. 4, lies und $(a-h)-(b-k)$

— 44. Zeile 1, lies f bis m

ebdf. — 14, l. $\frac{h}{m} = n$

— — 15, l. $\frac{ah}{bm} = en$

— 45. — 2, l. $= e$

ebdf. — 8, l. $= \frac{a}{h} : \frac{b}{m}$

— — 10, l. $\frac{b}{m} = 1$

Seite

Seite 48. Zeile 13, lies a : b
— 51. — 18, statt 6 lies 5
— 55. — 22, l. $d = \frac{b \cdot c}{a}$;
— 60. — 12, l. = a : c
— 67. — 7, lies den letzten Bruch so:

$$\frac{328 \cdot 1\ \text{P.F.}\ 14400\ \text{R.F.}}{13913 \cdot 1\ \text{P.F.}}$$

— 71. — 23, l. $\frac{5}{12}$ = 6 gr. + 4 gr.
— 72. — 4 und 5 streiche weg: oder = $\frac{3}{4}$ rthlr. + $4\frac{1}{6}$ rthl.
— 73. letzte Zeile, l. $\frac{1}{12} \cdot (\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$ rthlr.
— 74. streiche die 2te Zeile weg, und Zeile 12 lies $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$) rthl.
— 75. Zeile 17, l. = $\frac{1}{3}$ rthlr.
— 81. — 15, l. $\frac{1}{4}$. 440 rthlr. 12 gr.
— 82. — 1, l. $\frac{1}{6}$ rthlr. statt $\frac{1}{3}$ rthlr.
— 83. — 12, l. 1727 rthlr.
— 85. — 16, l. Facit 306 rthlr.
ebds. — 17, statt 8 lies 3
— 87. — 3, l. 392 rthlr.
ebds. — 12, l. = $\frac{5}{6}$ rthlr.
— 88. — 15, l. 2 statt 3
— 89. — 16, l. 29 rthlr. 2 gr.
— 90. — 19, statt 21 l. 12
— 91. — 5, l. 36 rthlr.
ebds. — 14, l. 345 rthlr., statt 335 rthlr.
— 93. — 15, l. $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{6} = \frac{1}{8}$
— 94. — 5, l. 890 rthlr.
— 97. — 22, l. $\frac{9}{16}$ rthlr. statt $\frac{9}{18}$ rthlr.
— 101. — 14, l. Betancourt
— 104. — 17, l. $(1 - \frac{1}{15})$. G
— 109. letzte Zeile, l. 28 gr.
— 113 und 114. lies Pinakothek
— 124. — 11, l. $4x - 6y = 0$
— 133. — 11 und 12, lies worden, sind auch hier gebraucht worden.
— 135. — 14, l. Durch
— 178. — 12, statt sagen lies: seyn
— ebds. — 18, statt $2x - 9$ lies: $2y - 9$
— 181. — 11, statt $72\ \frac{3}{5}y$ lies: $72 - \frac{3}{5}y$
— 184. — 9, statt als wirklich lies: als er wirklich
— 191. statt 9 lies überall: q
— 193. Zeile 10, lies: $(4 + \frac{z}{2})^2 - (4 - \frac{z}{2})^2$

Seite

Seite 193. Zeile 12, lies: $4 - \frac{x}{2} = 3$
— 194. — 5, lies: = d; s. δ = d
— 195. — 13, lies: von der kleinern ausmache: da sich nun aus der 2ten Bedingung ergiebt, daß $\frac{1}{3}$ der kleinern nebst 1, ꝛc.
— ebds. — 16, lies: Unterschiedes gleich $\frac{2}{15}$ der kleinern nebst 1, und folglich der Unterschied selbst gleich $\frac{10}{15}$ der kleinern nebst 5, also $\frac{1}{3}$ des Unterschiedes gleich $\frac{2}{9}$ ꝛc.
— ebds. letzte Zeile, lies: 3 y
— 214. Zeile 15, lies: daß es ein
— 219. — 20, lies: mit dem Fünffachen
— 222. — 4 von unten, lies: $\frac{a\,c + b\,d}{c + d} = x$
— 223. — 3 u. 8 v. u. nach mehr und viel lösche die Comma weg
— 250. — 12, lies: nebst 17 u. Zeile 13 lies: 15, und,
— 289. — 11, v. u. lies: $\frac{45}{6}$, 68 fl.
— 301. — 8, statt wenn lies: wovon
— 331. — 10, v. u. lies: Man suche die

Ich habe im ersten und 2ten Theile meiner Sammlung algebraischer Aufgaben, unter andern auch Herrn Sachs Versuch algebraische Aufg. vom ersten Grade mit einer u. zwei unbekannten Größen ohne Algebra aufzulösen, Berlin, 1799 in 8v., erwähnt und einige Erinnerungen zum Besten der Anfänger gegen einige Auflösungen des Sachs gemacht. Darüber hat Hr. Sachs sich auf die unanständigste Art erklärt, in der Vorrede zu seinen Auflösungen der Aufgaben von Meier Hirsch. Ob meine Erinnerungen, die übrigens nie den Anstand verletzen, gegründet sind, mag der Leser entscheiden; ich bin es aber mir schuldig, statt aller Antwort auf die so unbescheidenen als ungegründeten Beschuldigungen des Hrn. Sachs nur folgendes zur Kenntniß des Publikums zu bringen. — Im Jahre 1791 hat Hr. Sachs bei mir Unterricht in der Algebra gehabt. Nun gebe ich außer den algebr. Auflöss., wie alle meine Schüler, deren viele Hunderte sind, es bezeugen können, immer neben her auch arithm. Auflöss. Dem Hrn. Sachs empfahl ich ebenfalls diese Uebung, daraus entstand denn sein oben genanntes Werkchen, worin sämmtl. Aufg. aus meiner Samml. algebr. Aufg. entlehnt und nach meinem ihm ertheilten Unterricht arithm. aufgelöst sind. Hrn. Sachs fehlt es wie fast allen Israeliten nicht an Scharfsinn, aber es fehlt ihm an Fleiß, um es in der Mathematik weit zu bringen, und aus seiner undelicaten Handlungsweise gegen seinen ehemaligen uneigennützigen Lehrer fällt nun auch in die Augen, daß auch Dankbarkeit seine Tugend nicht ist.